LE QG 3E · MATHÉMATIQUES · NOMBRES-CALCUL

Arithmétique en 3e : cours, exercices et méthode pour le brevet

3e | Difficulté ★★★ | 45 min | Objectif : arithmétique | Tombe souvent au brevet | Fiche élève

Prénom : .....

Date : .....

Compétence visée (programme cycle 4) : Nombres relatifs, puissances, calcul littéral, racines carrées, arithmétique (PGCD, nombres premiers). les automatismes du brevet.

Coach Vince te résume l'essentiel

- Un nombre premier possède exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.
- La décomposition en facteurs premiers permet de calculer un PGCD et de simplifier une fraction avec méthode.
- Coach Vince te demande une rédaction nette : règle annoncée, calcul organisé, conclusion précise.

AU BREVET, ON TE DEMANDE...

Tu dois décomposer des entiers, calculer un PGCD, simplifier une fraction ou résoudre un problème de partage sans reste en justifiant le choix du PGCD.

Type de question	Calcul à justifier, problème contextualisé et QCM d'automatismes sans calculatrice.
Exemple type	Deux rubans de 84 cm et 126 cm doivent être découpés en morceaux de même longueur, la plus grande possible, sans chute. Quelle longueur choisir ?
Alerte piège	Trouver un diviseur commun sans vérifier qu'il est le plus grand, ou donner le PGCD sans répondre à la question concrète sur les lots, les morceaux ou la fraction.

LA LEÇON

Diviseurs, multiples et vocabulaire de départ

L'arithmétique étudie les propriétés des nombres entiers. Pour travailler proprement, commence par distinguer les mots essentiels. Dire que a divise b signifie qu'il existe un entier k tel que $b = a \times k$. On note aussi $a \mid b$. Dans cette situation, a est un diviseur de b et b est un multiple de a. Par exemple, 7 divise 42 car $42 = 7 \times 6$. Donc 7 est un diviseur de 42, et 42 est un multiple de 7. En revanche, 8 ne divise pas 42 : aucune multiplication de 8 par un entier ne donne 42. Ne confonds pas « diviseur » et « multiple » : 6 est un diviseur de 30, tandis que 30 est un multiple de 6. Un nombre positif possède toujours au moins les diviseurs 1 et lui-même. Les diviseurs de 18 sont 1, 2, 3, 6, 9 et 18. Ils vont souvent par paires : 1×18, 2×9 et 3×6. Cette observation est utile pour les lister sans oubli. Le nombre 1 n'est pas premier, car il n'a qu'un seul diviseur positif. Le nombre 0 est divisible par tout entier non nul. Dans le cadre usuel du collège, on exclut 0 comme diviseur, car une division par 0 n'a pas de sens. Avec la définition $a \mid b$ si $b = a \times k$, on peut toutefois dire que 0 divise 0, puisque $0 = 0 \times k$ pour tout entier k. Reste vigilant sur ce cas particulier.

Tests de divisibilité : le bon réflexe avant de calculer

- Un entier est divisible par 2 si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8. Ainsi, 1 346 est divisible par 2.

- Un entier est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est un multiple de 3. Pour 1 347, la somme vaut 1 + 3 + 4 + 7 = 15 ; 1 347 est donc divisible par 3.
- Un entier est divisible par 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5. Le nombre 2 175 est divisible par 5.
- Un entier est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est un multiple de 9. Pour 4 653, la somme vaut 4 + 6 + 5 + 3 = 18 ; 4 653 est donc divisible par 9.
- Un entier est divisible par 4 si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4. Comme 36 est divisible par 4, 2 736 est divisible par 4.
- Ces critères servent uniquement à décider une divisibilité par 2, 3, 4, 5 ou 9. Ils ne remplacent pas une division pour un autre diviseur. Pour savoir si 221 est divisible par 13, un test de somme des chiffres ne suffit pas.

Reconnaître et décomposer un nombre premier

Notion	Définition ou méthode	Exemple
Nombre premier	Entier positif ayant exactement deux diviseurs positifs distincts : 1 et lui-même.	17 est premier : ses seuls diviseurs sont 1 et 17.
Nombre composé	Entier positif supérieur à 1 qui possède plus de deux diviseurs positifs.	18 est composé car 2, 3, 6 et 9 le divisent aussi.
Décomposition en facteurs premiers	Écrire un entier supérieur à 1 comme produit de nombres premiers uniquement.	$84 = 2^2 \times 3 \times 7$.
Méthode	Divise successivement par le plus petit nombre premier possible, jusqu'à obtenir 1.	$90 = 2 \times 45 = 2 \times 3 \times 15 = 2 \times 3^2 \times 5$.

Décomposer sans te tromper

La décomposition en facteurs premiers s'applique à tout entier positif supérieur ou égal à 2. Cherche d'abord si le nombre est pair : s'il l'est, divise par 2. Sinon, teste 3 grâce à la somme des chiffres, puis 5, puis les autres nombres premiers dans l'ordre. À chaque ligne, écris une égalité exacte. Pour décomposer 420, tu peux écrire : $420 = 2 \times 210 = 2 \times 2 \times 105 = 2^2 \times 3 \times 35 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$. La forme finale est $420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$. Ne termine jamais avec un facteur composé, par exemple $420 = 4 \times 3 \times 5 \times 7$: l'égalité est vraie, mais ce n'est pas une décomposition en facteurs premiers, car $4 = 2^2$. Vérifie ton résultat en multipliant les facteurs : $2^2 \times 3 \times 5 \times 7 = 4 \times 3 \times 5 \times 7 = 420$. Cette vérification rapide évite une erreur de calcul. Quand un même facteur premier apparaît plusieurs fois, utilise une puissance : $2 \times 2 \times 2 = 2^3$. L'exposant indique combien de fois le facteur est répété ; il ne s'agit pas d'une multiplication par cet exposant.

PGCD : trouver le plus grand diviseur commun

Le PGCD de deux entiers non nuls est leur plus grand diviseur commun. PGCD signifie « plus grand commun diviseur ». Il est toujours positif. Pour calculer le PGCD de deux nombres avec leurs décompositions, décompose chaque nombre en facteurs premiers, repère les facteurs présents dans les deux écritures et garde-les avec le plus petit exposant commun. Prenons 180 et 252. On obtient $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ et $252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$. Les facteurs communs sont 2^2 et 3^2. Donc PGCD(180 ; 252) = $2^2 \times 3^2 = 36$. Le facteur 5 n'apparaît que dans 180, le facteur 7 seulement dans 252 : ils ne doivent pas être gardés. Si les deux nombres n'ont aucun diviseur commun autre que 1, leur PGCD vaut 1 ; ils sont alors premiers entre eux. Cette expression ne signifie pas que chacun est premier. Par exemple, 8 et 15 sont premiers entre eux, pourtant 8 n'est pas premier. Le PGCD intervient dans les problèmes de partage en lots identiques. Si tu dois répartir 180 objets d'une sorte et 252 objets d'une autre dans le plus grand nombre possible de lots identiques, sans reste, le nombre de lots est PGCD(180 ; 252), donc 36. Chaque lot contient alors $180 \div 36 = 5$ objets de la première sorte et $252 \div 36 = 7$ objets de la seconde. Lis toujours le contexte : le PGCD donne ici le nombre maximal de lots, pas le contenu total d'un lot.

Simplifier une fraction jusqu'à l'écriture irréductible

Pour simplifier une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des entiers, tu peux diviser ces deux nombres par un même diviseur non nul. Une fraction est irréductible lorsque son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux, donc lorsque leur PGCD vaut 1. La méthode la plus sûre consiste à calculer le PGCD. Pour 126 ÷ 210, les décompositions donnent $126 = 2 \times 3^2 \times 7$ et $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$. Le PGCD est $2 \times 3 \times 7 = 42$. Alors 126 ÷ 210 = 3 ÷ 5, car 126 ÷ 42 = 3 et 210 ÷ 42 = 5. La fraction 3 ÷ 5 est irréductible puisque PGCD(3 ; 5) = 1. Ne divise jamais seulement le numérateur ou seulement le dénominateur : tu changerais la valeur de la fraction. Ne simplifie pas non plus « en diagonale » dans une addition de fractions. La simplification concerne une fraction écrite comme un quotient, ou un facteur commun dans un produit, pas les termes séparés par + ou −. Ton plan de jeu est simple : décompose, repère le commun, calcule, puis conclus par une phrase.

Exemples résolus

Calculer un PGCD par décomposition

Énoncé. Calcule PGCD(168 ; 360).

1. Décompose 168 : $168 = 2^3 \times 3 \times 7$.
2. Décompose 360 : $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$.
3. Repère les facteurs premiers communs avec le plus petit exposant : 2^3 et 3.
4. Calcule : $2^3 \times 3 = 8 \times 3 = 24$.

Résultat : PGCD(168 ; 360) = 24.

Répartir en lots identiques

Énoncé. Une association possède 144 cahiers et 216 stylos. Elle veut préparer le plus grand nombre de lots identiques, sans reste. Détermine ce nombre de lots et leur contenu.

1. Le nombre maximal de lots doit diviser 144 et 216 : il s'agit donc de leur PGCD.
2. Décompose : $144 = 2^4 \times 3^2$ et $216 = 2^3 \times 3^3$.
3. Les facteurs communs au plus petit exposant sont $2^3 \times 3^2$, soit $8 \times 9 = 72$.
4. Calcule le contenu d'un lot : 144 ÷ 72 = 2 cahiers et 216 ÷ 72 = 3 stylos.

Résultat : L'association peut préparer 72 lots identiques contenant chacun 2 cahiers et 3 stylos.

Rendre une fraction irréductible

Énoncé. Rends la fraction 198 ÷ 330 irréductible.

1. Décompose : $198 = 2 \times 3^2 \times 11$ et $330 = 2 \times 3 \times 5 \times 11$.
2. Le PGCD est $2 \times 3 \times 11 = 66$.
3. Divise le numérateur et le dénominateur par 66 : 198 ÷ 66 = 3 et 330 ÷ 66 = 5.
4. Vérifie que 3 et 5 sont premiers entre eux.

Résultat : 198 ÷ 330 = 3 ÷ 5, fraction irréductible.

TA SÉANCE D'ENTRAÎNEMENT

1 Tests rapides ★☆☆

Indique si chaque affirmation est vraie ou fausse.

1. 2 418 est divisible par 3. .....
2. 5 724 est divisible par 5. .....
3. 3 636 est divisible par 4. .....

2 Nombre premier ou composé ★☆☆

Classe chaque nombre.

1. 29 .....
2. 51 .....
3. 1 .....

3 Décompositions nettes ★☆☆

Décompose chaque entier en produit de facteurs premiers.

1. 72 .....
2. 150 .....
3. 231 .....

4 Calculer des PGCD ★★☆

Calcule chaque PGCD par décomposition en facteurs premiers.

1. PGCD(54 ; 90) .....
2. PGCD(56 ; 75) .....

5 Dernière simplification ★★☆

Rends chaque fraction irréductible.

1. 84 ÷ 126 .....
2. 156 ÷ 234 .....

6 Répartition maximale ★★☆

Résous le problème en rédigeant ta démarche.

On dispose de 96 bouteilles d'eau et de 144 barres de céréales. On veut former le plus grand nombre de lots identiques, sans reste. Détermine le nombre de lots et leur contenu.

7 Corriger un raisonnement ★★★

Analyse l'erreur et rédige la correction.

Un élève écrit : « $84 = 2^2 \times 3 \times 7$ et $126 = 2 \times 3^2 \times 7$, donc PGCD(84 ; 126) = $2^2 \times 3^2 \times 7 = 252$. »

8 Finale : découpe sans chute ★★★

Justifie la longueur maximale des morceaux et leur nombre total.

Deux rubans mesurent 198 cm et 330 cm. On les découpe en morceaux de même longueur, la plus grande possible, sans chute. Détermine la longueur d'un morceau puis le nombre total de morceaux.

ÉVALUATION

Rédige les calculs nécessaires et donne une conclusion pour chaque problème.

Barème : 20 points

1. Décompose 420 en produit de facteurs premiers. / 3

2. Indique si 1 458 est divisible par 9 et justifie. / 2

3. Calcule PGCD(126 ; 210) par décomposition. / 4

4. Rends irréductible la fraction 126 ÷ 210. / 3

5. Explique pourquoi 14 et 25 sont premiers entre eux. / 3

6. Avec 126 roses et 210 tulipes, détermine le plus grand nombre de bouquets identiques sans reste et leur composition. / 5

Les conseils de Coach Vince

Annonce la règle utile
Avant un PGCD, écris que tu décomposes les deux nombres en facteurs premiers et que tu gardes les facteurs communs. Ta conclusion devient vérifiable ligne par ligne.

Contrôle final
Après une simplification, vérifie que le numérateur et le dénominateur sont premiers entre eux. Après un problème de lots, multiplie le contenu d'un lot par le nombre de lots pour retrouver les quantités initiales.

Pour aller plus loin sur exercices-3eme.fr

- **Toutes les fiches de Mathématiques en 3e** · /mathematiques-3eme/
- **Le domaine « nombres-calcul » en 3e** · /mathematiques-3eme/nombres-calcul/
- **Préparer le brevet (dates, épreuves, méthode)** · /brevet/