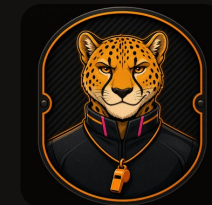


LE QG 3E - MATHÉMATIQUES - NOMBRES-CALCUL

# Développer et factoriser en 3<sup>e</sup> : cours, exercices et méthode pour le brevet



3<sup>e</sup>

Difficulté ★★



45 min

Objectif : développer et factoriser

Tombe souvent au brevet

Vidéoprojection

**Compétence visée (programme cycle 4) :** Développer et factoriser une expression littérale, en utilisant la distributivité et les identités remarquables, et choisir la forme adaptée au problème posé.



## Coach Vince te résume l'essentiel

- ▶ Développer, c'est transformer un produit en somme ou différence en utilisant la distributivité.
- ▶ Factoriser, c'est écrire une somme ou une différence sous la forme d'un produit, souvent en mettant un facteur commun en évidence.

- Coach Vince te demande de choisir la forme utile : développée pour réduire ou comparer, factorisée pour calculer, résoudre ou repérer un produit nul.

## AU BREVET, ON TE DEMANDE...

Tu dois développer ou factoriser une expression, réduire le résultat et choisir la forme la plus efficace dans un calcul, une équation ou un problème.

**Type de question** Calcul littéral à justifier, automatisme sans calculatrice, résolution d'une équation-produit ou choix de la forme adaptée.

**Exemple type** On considère  $E = (x - 4)(x + 4)$ . Développe  $E$ , puis calcule  $E$  pour  $x = 11$  en choisissant la forme la plus pratique.

**Alerte piège** Oublier un produit dans la double distributivité, perdre un signe négatif ou développer une expression alors que la forme factorisée est demandée.

# I LA LEÇON

## I Deux formes pour une même expression

Une expression littérale contient une ou plusieurs lettres qui représentent des nombres. Par exemple,  $3(x + 4)$ ,  $3x + 12$  et  $3 \times (x + 4)$  désignent la même expression, écrite sous des formes différentes. La forme  $3(x + 4)$  est une forme factorisée : elle présente un produit. La forme  $3x + 12$  est une forme développée : elle présente une somme de termes. Développer consiste à passer d'une forme avec parenthèses multipliées à une somme ou une différence. Factoriser consiste à faire le trajet inverse. Ces transformations ne changent pas la valeur de l'expression : elles changent seulement son écriture. Tu dois donc conserver une égalité entre les deux formes. Écris par exemple  $5(2x - 3) = 10x - 15$ , et non une simple suite de calculs sans signe égal. Une expression développée est souvent utile pour réduire les termes semblables ou comparer des coefficients. Une expression factorisée est particulièrement utile pour calculer astucieusement, résoudre une équation-produit ou étudier le signe d'un produit. Avant de calculer, demande-toi toujours quelle forme répond à la question. C'est ton plan de jeu.

## Les distributivités à connaître sans hésiter

| Règle et condition                                                                                                                                      | Exemple détaillé                                                              | Résultat         |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| La simple distributivité s'applique lorsqu'un facteur multiplie une somme ou une différence : $k(a + b) = ka + kb$ et $k(a - b) = ka - kb$ .            | $-4(2x - 5) = (-4) \times 2x + (-4) \times (-5)$                              | $-8x + 20$       |
| La double distributivité s'applique lorsqu'une somme ou une différence multiplie une autre somme ou différence : $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$ . | $(x + 3)(2x - 5) = x \times 2x + x \times (-5) + 3 \times 2x + 3 \times (-5)$ | $2x^2 + x - 15$  |
| Pour deux différences, chaque produit conserve le signe obtenu par la règle des signes.                                                                 | $(x - 4)(x - 7) = x^2 - 7x - 4x + 28$                                         | $x^2 - 11x + 28$ |

## **Développer avec une méthode fiable**

- Repère d'abord le facteur placé devant la parenthèse, ou les deux parenthèses qui se multiplient. Ne commence pas par additionner des termes qui ne sont pas semblables.
- Avec la simple distributivité, multiplie le facteur extérieur par chaque terme de la parenthèse. Dans  $7(3x + 2)$ , 7 doit multiplier  $3x$  puis 2 :  $7(3x + 2) = 21x + 14$ .
- Avec la double distributivité, trace mentalement quatre produits : premier terme par premier terme, premier par second, second par premier, second par second. Aucun terme ne doit être oublié.
- Écris les produits intermédiaires avec leurs signes. Dans  $(2x - 1)(x + 6)$ , écris  $2x^2 + 12x - x - 6$  avant de réduire. Cette ligne permet de vérifier ton travail.
- Réduis seulement à la fin les termes semblables. Ici,  $12x - x = 11x$ , donc  $(2x - 1)(x + 6) = 2x^2 + 11x - 6$ .
- Contrôle les signes : multiplier deux nombres de même signe donne un résultat positif ; multiplier deux nombres de signes contraires donne un résultat négatif. Ainsi,  $(-3)(-4) = 12$ , mais  $(-3) \times 4 = -12$ .
- Pour vérifier un développement, choisis une valeur simple de la lettre qui ne crée aucune difficulté de calcul. Si  $x = 2$ , alors  $(x + 3)(2x - 5)$  vaut  $5 \times (-1)$ , donc  $-5$ . La forme développée  $2x^2 + x - 15$  vaut aussi  $2 \times 4 + 2 - 15$ , donc  $-5$ . Les deux valeurs coïncident.

## Identités remarquables : des raccourcis sous condition

Les identités remarquables s'utilisent seulement lorsqu'un produit correspond exactement à leur forme. Pour tous nombres  $a$  et  $b$  :  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  ;  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$  ;  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ . Par exemple,  $(x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25$ , car  $2 \times x \times 5 = 10x$ . En revanche,  $x^2 - 25$  se factorise en  $(x + 5)(x - 5)$  : c'est une différence de deux carrés. Ne transforme jamais  $(a + b)^2$  en  $a^2 + b^2$  : le terme  $2ab$  est indispensable.

## Factoriser : faire apparaître un produit

Factoriser revient à chercher ce que plusieurs termes ont en commun. Le cas le plus fréquent est le facteur commun. Dans  $6x + 18$ , les deux termes sont divisibles par 6. On écrit donc  $6x + 18 = 6(x + 3)$ . Le nombre 6 est le facteur commun mis devant la parenthèse. Dans  $15x^2 - 10x$ , le facteur commun est  $5x$  :  $15x^2 - 10x = 5x(3x - 2)$ . Vérifie cette écriture en développant :  $5x \times 3x = 15x^2$  et  $5x \times (-2) = -10x$ . Ne choisis pas seulement un nombre lorsque la lettre est aussi commune aux termes. Cela reste juste d'écrire  $15x^2 - 10x = 5(3x^2 - 2x)$ , mais  $5x(3x - 2)$  est plus factorisé et souvent plus utile. Attention : un terme absent ne peut pas être inventé. Dans  $x^2 + 4$ ,  $x$  n'est pas facteur commun, car 4 ne contient pas  $x$ . Une factorisation par facteur commun est possible seulement si chaque terme contient ce facteur. Tu peux

aussi factoriser en reconnaissant une identité remarquable. Ainsi,  $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$ , car  $8x = 2 \times x \times 4$  et  $16 = 4^2$ . De même,  $9x^2 - 1 = (3x + 1)(3x - 1)$ , car c'est la différence de deux carrés :  $(3x)^2 - 1^2$ .

## **| Choisir la forme qui fait gagner du temps**

La forme adaptée dépend de la tâche. Pour réduire une expression comme  $4(x - 2) + 3x$ , développe d'abord :  $4x - 8 + 3x = 7x - 8$ . La forme développée permet de regrouper les termes en  $x$ . Pour calculer mentalement  $9 \times 48$ , écris  $9 \times 48 = 9(50 - 2) = 9 \times 50 - 9 \times 2 = 450 - 18 = 432$ . Ici, la forme factorisée  $9(50 - 2)$  rend le calcul plus simple. Pour résoudre une équation telle que  $(x - 3)(2x + 1) = 0$ , conserve impérativement la forme factorisée : un produit est nul si, et seulement si, l'un de ses facteurs est nul. Tu peux alors écrire  $x - 3 = 0$  ou  $2x + 1 = 0$ , d'où  $x = 3$  ou  $x = -\frac{1}{2}$ . Développer avant de résoudre serait possible, mais moins direct et plus risqué. Dans un programme de calcul, une expression factorisée peut montrer les étapes successives ; une forme développée peut révéler une expression plus simple. Au brevet, ne transforme pas mécaniquement. Lis le verbe de la consigne : « développer », « factoriser », « calculer », « résoudre » ou « montrer » n'attendent pas la même forme finale. Termine toujours par une expression réduite, correctement ordonnée et sans parenthèses inutiles si l'on demande de développer. Coach Vince veut une rédaction lisible : une transformation par ligne, des égalités exactes et une vérification numérique quand elle est demandée.

## Exemples résolus

### Double distributivité et réduction

**Énoncé.** Développe et réduis  $A = (3x - 2)(x + 5)$ .

1. Chaque terme de la première parenthèse doit multiplier chaque terme de la seconde.
2.  $A = 3x \times x + 3x \times 5 - 2 \times x - 2 \times 5$ .
3.  $A = 3x^2 + 15x - 2x - 10$ .
4. Réduis les termes semblables :  $15x - 2x = 13x$ .

**Résultat :**  $A = 3x^2 + 13x - 10$ .

### Factoriser par un facteur commun

**Énoncé.** Factorise  $B = 12x^2 - 18x$ .

1. Les deux termes contiennent  $6x$  :  $12x^2 = 6x \times 2x$  et  $18x = 6x \times 3$ .
2. Mets  $6x$  en facteur commun.
3.  $B = 6x(2x - 3)$ .

4. Vérifie :  $6x \times 2x = 12x^2$  et  $6x \times (-3) = -18x$ .

**Résultat :**  $B = 6x(2x - 3)$ .

### Utiliser une identité remarquable

**Énoncé.** Développe  $C = (2x - 7)^2$ .

1. Utilise  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$  avec  $a = 2x$  et  $b = 7$ .

2.  $C = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 7 + 7^2$ .

3.  $C = 4x^2 - 28x + 49$ .

**Résultat :**  $C = 4x^2 - 28x + 49$ .

## Les conseils de Coach Vince



### Une ligne de contrôle

Après une double distributivité, garde une ligne avec les quatre produits avant de réduire. Elle rend tes signes vérifiables et protège ton résultat.



### La forme finale compte

Lis le verbe de la consigne avant d'écrire ta réponse finale. Développée, factorisée ou résolue : la bonne forme est une partie de la réussite.

## TA SÉANCE D'ENTRAÎNEMENT

### 1 Simple distributivité ★★

*Développe et réduis chaque expression.*

1.  $A = 5(x + 3)$

2.  $B = -2(4x - 7)$

### 2 Mettre en facteur ★★

*Factorise par le facteur commun le plus grand possible.*

1.  $C = 7x + 21$

2.  $D = 9x^2 - 6x$

### 3 Série de quatre produits ★★

*Développe, réduis et écris une ligne de produits intermédiaires.*

1.  $E = (x + 2)(3x - 4)$

2.  $F = (2x - 3)(x - 5)$