Calcul au brevet en 3e : signes, priorités, puissances, racines et PGCD à maîtriser

3e | Difficulté ★★☆ | ⏱ 50 min | Objectif : réussir les calculs du brevet | Tombe souvent au brevet | Éco-encre (N&B)

Prénom : ..... **Date :** .....

Compétence visée (programme cycle 4) : Nombres relatifs, puissances, calcul littéral, racines carrées, arithmétique (PGCD, nombres premiers). les automatismes du brevet.

Coach Vince te résume l'essentiel

- Au brevet, un calcul juste commence par une expression bien lue et des priorités respectées.
- Tu dois connaître les règles sur les relatifs, les puissances, les racines carrées, le calcul littéral et les diviseurs.
- Coach Vince te demande une rédaction courte mais nette : règle, calcul aligné, résultat vérifié.

AU BREVET, ON TE DEMANDE...

Tu dois calculer proprement, utiliser une règle adaptée et justifier les étapes décisives, notamment pour les relatifs, les expressions littérales et le PGCD.

Type de question	Calcul à justifier, QCM d'automatismes sans calculatrice, développement ou factorisation, décomposition en facteurs premiers et problème de partage.
Exemple type	Sans calculatrice, calcule $C = 5 - 2 \times (-3)^2$ puis décompose 180 en produit de facteurs premiers et détermine PGCD(180 ; 84).
Alerte piège	Calculer de gauche à droite sans respecter les puissances, oublier les parenthèses autour d'un nombre négatif ou confondre un nombre premier avec deux nombres premiers entre eux.

LA LEÇON

Le plan de jeu des automatismes

Les automatismes sont des calculs que tu dois pouvoir traiter vite, avec ou sans calculatrice selon la consigne. Ils ne demandent pas une longue démonstration, mais ils exigent une rigueur totale. Un signe oublié, une parenthèse mal lue ou une priorité ignorée suffit à rendre un résultat faux. Avant de calculer, repère la nature de l'expression : contient-elle des nombres négatifs, des puissances, une racine carrée, des lettres ou une question de divisibilité ? Tu choisis alors la règle adaptée. Ne mélange pas les étapes. Dans une expression numérique, calcule d'abord les parenthèses, puis les puissances et les racines carrées, ensuite les multiplications et divisions de gauche à droite, enfin les additions et soustractions de gauche à droite. Cette règle vaut pour toute expression écrite sans fraction complexe ni indication contraire. Par exemple, dans $A = 7 - 3 \times 2^2$, on calcule $2^2 = 4$, puis $3 \times 4 = 12$, donc $A = 7 - 12 = -5$. Écrire directement 8^2 ou 4×7 serait une erreur de lecture. Lorsqu'une question demande une valeur exacte, ne transforme pas $\sqrt{36}$ en 6,0 et ne donne pas une approximation inutile. Lis aussi les mots de la consigne : « calculer » impose un résultat ; « développer » impose de supprimer des parenthèses ; « factoriser » impose de faire apparaître un produit ; « justifier » impose d'écrire la propriété utilisée. Ton objectif est simple : chaque ligne doit pouvoir être contrôlée par un correcteur.

Signes et priorités : les réflexes indispensables

Situation	Règle valable	Exemple
Produit ou quotient de deux nombres relatifs	Même signe : résultat positif. Signes différents : résultat négatif.	$(-6) \times (-4) = 24$; $35 \div (-5) = -7$
Somme de relatifs de même signe	Additionne les distances à zéro et conserve le signe commun.	$-8 + (-3) = -11$
Somme de relatifs de signes différents	Soustrais les distances à zéro et garde le signe du nombre ayant la plus grande distance à zéro.	$-12 + 5 = -7$
Soustraction d'un relatif	Soustraire un nombre revient à ajouter son opposé.	$9 - (-4) = 9 + 4 = 13$
Carré d'un nombre relatif	Le carré est toujours positif ou nul, car il multiplie un nombre par lui-même.	$(-5)^2 = 25$

Parenthèses : ne perds pas le signe

Le signe « − » placé devant une parenthèse change tous les signes à l'intérieur lorsque tu la supprimes. Ainsi, $4 - (3 - 7) = 4 - 3 + 7 = 8$. En revanche, dans -3^2, le carré porte seulement sur 3 : $-3^2 = -9$. Pour obtenir 9, il faut écrire $(-3)^2$.

Puissances et racines carrées : connaître le domaine de chaque règle

- Pour tout nombre a, a^2 signifie $a \times a$ et a^3 signifie $a \times a \times a$. Ainsi, $4^3 = 64$ et $(-2)^3 = -8$.
- Pour un même nombre non nul a, $a^m \times a^n = a^{m+n}$. Par exemple, $10^2 \times 10^3 = 10^5$. Cette règle ne permet pas d'additionner les exposants dans $10^2 + 10^3$.
- Pour un même nombre non nul a, $a^m \div a^n = a^{m-n}$ lorsque m est supérieur ou égal à n. Ainsi, $5^6 \div 5^2 = 5^4 = 625$.
- Le produit de puissances de même exposant vérifie $a^n \times b^n = (a \times b)^n$. Par exemple, $2^3 \times 5^3 = 10^3 = 1\,000$. Cette règle concerne un produit, jamais une somme.
- La racine carrée de x, notée $\sqrt{x}$, est le nombre positif ou nul dont le carré vaut x. Dans les nombres réels, $\sqrt{x}$ existe seulement si x est positif ou nul.
- $\sqrt{49} = 7$ car $7^2 = 49$. En revanche, $\sqrt{(-9)}$ n'existe pas dans les nombres réels. N'écris jamais $\sqrt{49} = \pm 7$: la racine carrée désigne 7 seulement.
- La propriété $\sqrt{(a^2)} = a$ est valable si a est positif ou nul. Plus généralement, $\sqrt{(a^2)}$ est la distance de a à zéro : $\sqrt{((-6)^2)} = 6$.

Calcul littéral : transformer sans déformer

Une expression littérale contient des nombres et des lettres représentant des nombres. Réduire une expression, c'est regrouper uniquement les termes semblables. Les termes 5x et −2x sont semblables, car ils contiennent la même lettre x à la puissance 1. Donc $5x - 2x = 3x$. En revanche, 5x et $5x^2$ ne sont pas semblables : tu ne peux pas les additionner. Dans $3a + 4 - 7a + 2$, regroupe d'un côté les termes en a et de l'autre les nombres : $3a - 7a + 4 + 2 = -4a + 6$. Respecte les signes quand tu changes l'ordre des termes. Développer consiste à supprimer des parenthèses grâce à la distributivité. Pour tous nombres a, b et k, $k(a + b) = ka + kb$ et $k(a - b) = ka - kb$. Ainsi, $-3(2x - 5) = -6x + 15$: le facteur −3 est multiplié par chacun des deux termes. Si deux parenthèses sont précédées d'un signe plus, elles peuvent être supprimées sans changer les signes : $x + (4x - 9) = 5x - 9$. Si une parenthèse est précédée d'un signe moins, tous ses signes changent : $6x - (2x + 7) = 6x - 2x - 7 = 4x - 7$. Factoriser est l'opération inverse : tu fais apparaître un facteur commun. Dans $8x + 12$, le facteur commun 4 donne $8x + 12 = 4(2x + 3)$. Vérifie toujours une factorisation en développant mentalement. Pour calculer une expression littérale pour une valeur donnée, remplace la lettre par cette valeur en utilisant des parenthèses, surtout si elle est négative. Si $B = 2x^2 -$

$3x$ et $x = -4$, alors $B = 2 \times (-4)^2 - 3 \times (-4) = 2 \times 16 + 12 = 44$. Les parenthèses évitent de transformer par erreur $(-4)^2$ en -16.

Arithmétique : diviseurs, nombres premiers et PGCD

L'arithmétique traite notamment des diviseurs entiers positifs. Dire que 6 divise 42 signifie qu'il existe un entier k tel que $42 = 6 \times k$; ici, $k = 7$. Le symbole $42 \div 6$ se lit « 42 est divisible par 6 ». Un nombre premier est un entier supérieur à 1 qui possède exactement deux diviseurs positifs distincts : 1 et lui-même. Ainsi, 2, 3, 5, 7 et 11 sont premiers, tandis que 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur positif. Pour décomposer un entier en produit de facteurs premiers, divise-le successivement par des nombres premiers. Par exemple, $84 = 2 \times 42 = 2 \times 2 \times 21 = 2^2 \times 3 \times 7$. Cette écriture est utile pour trouver un PGCD. Le PGCD de deux entiers positifs est leur plus grand diviseur commun. Avec $84 = 2^2 \times 3 \times 7$ et $60 = 2^2 \times 3 \times 5$, les facteurs premiers communs sont 2^2 et 3. Donc $\text{PGCD}(84 ; 60) = 2^2 \times 3 = 12$. Dans un problème de partage en lots identiques les plus grands possible, le PGCD donne souvent le nombre d'objets par lot ou le nombre maximal de groupes, selon ce qui est demandé. Lis la situation avant de répondre : un calcul seul ne suffit pas. Deux entiers sont premiers entre eux lorsque leur PGCD est égal à 1. Cela ne signifie pas qu'ils sont tous les deux premiers : 8 et 15 sont premiers entre eux, mais 8 n'est pas un nombre premier.

Le contrôle final de Coach Vince

Relis ton résultat avec trois questions : le signe est-il logique, l'ordre de grandeur est-il cohérent et ai-je répondu exactement à la demande ? Par exemple, un carré ne peut pas être négatif et un PGCD ne peut pas être supérieur à l'un des deux nombres étudiés. Cette vérification rapide te permet de corriger une étourderie avant de passer à la suite.

Exemples résolus

Calculer une expression avec relatifs et puissances

Énoncé. Calcule $A = -8 + 3 \times (-2)^2 - 18 \div (-3)$.

1. Calcule la puissance : $(-2)^2 = 4$.
2. Effectue la multiplication et la division : $3 \times 4 = 12$ et $18 \div (-3) = -6$.
3. Remplace dans l'expression : $A = -8 + 12 - (-6)$.
4. Soustraire -6 revient à ajouter 6 : $A = -8 + 12 + 6 = 10$.

Résultat : $A = 10$.

Développer puis réduire

Énoncé. Développe et réduis $B = 4(3x - 2) - 5(x + 1)$.

1. Distribue 4 dans la première parenthèse : $4(3x - 2) = 12x - 8$.
2. Distribue -5 dans la seconde parenthèse : $-5(x + 1) = -5x - 5$.
3. Regroupe les termes semblables : $B = 12x - 8 - 5x - 5 = 7x - 13$.

Résultat : $B = 7x - 13$.

Trouver un PGCD par décomposition

Énoncé. Détermine PGCD(90 ; 126).

1. Décompose 90 : $90 = 2 \times 3^2 \times 5$.
2. Décompose 126 : $126 = 2 \times 3^2 \times 7$.
3. Garde les facteurs premiers communs avec leurs exposants communs : 2×3^2.
4. Calcule : $2 \times 9 = 18$.

Résultat : PGCD(90 ; 126) = 18.

TA SÉANCE D'ENTRAÎNEMENT

1 Série 1 : signes ★☆☆

Calcule chaque expression.

1. $(-7) \times 6$ .....

2. $(-9) \times (-4)$ .....

3. $-15 + 8$ .....

4. $12 - (-5)$ .....

2 Série 2 : priorités ★☆☆

Calcule en respectant les priorités.

1. $18 - 2 \times 5$ .....

2. $3 \times (7 - 11)$ .....

3. $2^3 + 4^2$ .....

3 Série 3 : puissances et racines ★☆☆

Complète chaque égalité.

1. $\sqrt{81} = \ldots$ .....

2. $(-3)^3 = \ldots$ .....

3. $10^4 \div 10^2 = \ldots$ .....

4 Série 4 : réduire ★★☆

Réduis chaque expression.

1. $A = 7x - 3x + 5$ .....

2. $B = 4a + 9 - 6a - 2$ .....

3. $C = 5x^2 + 2x - 3x^2 + x$ .....

5 Série 5 : transformer une expression ★★☆

Développe ou factorise selon la demande.

1. Développe $D = 5(2x - 3)$. .....

2. Développe $E = -2(4x + 7)$. .....

3. Factorise $F = 9x + 18$. .....

6 Série 6 : diviseurs et PGCD ★★☆

Réponds en justifiant par une décomposition en facteurs premiers.

Détermine PGCD(72 ; 120).

Les nombres 35 et 48 sont-ils premiers entre eux ?

7 Série finale : calcul complet ★★★

Calcule et rédige les étapes dans l'ordre.

Calcule $G = 6 - 3 \times (-2)^2 + \sqrt{49}$.

Pour $x = -3$, calcule $H = 2x^2 - 5x + 1$.

8 Défi : organiser des lots ★★★

Justifie le nombre maximal de lots identiques possibles.

Une association possède 84 cahiers et 126 stylos. Elle veut former le plus grand nombre de lots identiques, sans reste, en utilisant tous les objets. Combien de lots peut-elle préparer et que contient chaque lot ?

ÉVALUATION

Réalise cette évaluation sans calculatrice, puis relis chaque signe et chaque priorité.

Barème : 20 points

1. Calcule $A = -6 + 4 \times (-3)$. / 3

2. Calcule $B = 5 - 2^2 \times 3$. / 3

3. Calcule $\sqrt{100}$ et $(-5)^3$. / 2

4. Développe et réduis $C = 3(2x - 4) + x$. / 3

5. Factorise D = 14x – 21. / 3

6. Décompose 108 en produit de facteurs premiers. / 3

7. Détermine PGCD(108 ; 90) en justifiant. / 3

Les conseils de Coach Vince

Écris la règle avant la ligne sensible
Avant une transformation qui peut prêter à confusion, annonce la règle : distributivité, priorité de calcul ou opposé d'un nombre. Une ligne de justification nette protège ton raisonnement.

Vérifie le résultat, pas seulement le calcul
Contrôle le signe, les parenthèses et la cohérence du résultat final. Au brevet, une réponse exacte mais sans unité ou sans conclusion peut être incomplète.

Pour aller plus loin sur exercices-3eme.fr

- **Toutes les fiches de Mathématiques en 3e** · /mathematiques-3eme/
- **Le domaine « nombres-calcul » en 3e** · /mathematiques-3eme/nombres-calcul/
- **Préparer le brevet (dates, épreuves, méthode)** · /brevet/