

L'homothétie en 3^e : cours, exercices et méthode pour le brevet

3^e

Difficulté ★★★



45 min

Objectif : l'homothétie

Tombe souvent au brevet

Éco-encre (N&B)

Prénom :

Date :

Compétence visée (programme cycle 4) : Construire l'image d'une figure par une homothétie de centre et de rapport donnés, et utiliser l'effet du rapport sur les longueurs, les aires et les angles.

Coach Vince te résume l'essentiel

- ▶ Une homothétie transforme une figure à partir d'un centre O et d'un rapport k .
- ▶ Les longueurs sont multipliées par $|k|$, les aires par k^2 et les angles conservent leur mesure.
- ▶ Le signe de k décide du côté du centre où se place l'image : même côté si k est positif, côté opposé si k est négatif.

AU BREVET, ON TE DEMANDE...

On te demande surtout de calculer une longueur ou une aire, de construire une image, ou de justifier qu'une figure est l'image d'une autre par une homothétie.

Type de question Calcul à justifier, construction géométrique, analyse de figure codée ou QCM d'automatismes.

Exemple type Le triangle $A' B' C'$ est l'image du triangle ABC par une homothétie de centre O et de rapport -2 . Sachant que $AB = 4,5$ cm et que l'aire de ABC vaut 7 cm², calcule $A' B'$ et l'aire de $A' B' C'$ en justifiant.

Alerte piège Oublier la valeur absolue pour les longueurs ou oublier le carré du rapport pour les aires, surtout lorsque le rapport est négatif.

LA LEÇON

Le repère de départ : centre, rapport et points alignés

Une homothétie est une transformation du plan définie par deux informations indispensables : un centre, noté en général O , et un rapport, noté k . L'image d'un point A est un point A' . Dire que A' est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport k signifie que les points O , A et A' sont alignés et que la longueur OA' vaut $|k| \times OA$. Le signe de k ne modifie pas cette longueur : il indique la position de A' par rapport au centre. Si k est positif, A et A' sont sur la même demi-droite d'origine O . Si k est négatif, ils sont sur deux demi-droites opposées d'origine O . Tu dois donc toujours examiner à la fois la valeur absolue et le signe du rapport. Le centre O est un point fixe : son image est lui-même. On écrit $O' = O$. Si $k = 1$, chaque point garde sa place : l'homothétie est l'identité. Si $k = -1$, l'image A' de A est telle que O est le milieu de $[AA']$: c'est la symétrie centrale de centre O . Si $k = 0$, tous les points ont pour image O ; on obtient une transformation particulière qui écrase toute figure sur le centre. Dans les problèmes de construction et de calcul, les rapports les plus fréquents sont différents de 0. Lorsque $|k|$ est supérieur à 1, les distances au centre augmentent : on parle d'agrandissement. Lorsque $|k|$ est compris entre 0 et 1, les distances au centre diminuent : on parle de réduction. Un rapport négatif peut donc aussi produire un agrandissement ou une réduction. Par exemple, $k = -2$ agrandit la figure, car $|-2| = 2$, tout en plaçant les images de

l'autre côté du centre. À l'inverse, $k = -\frac{1}{2}$ réduit la figure de moitié et place les images sur les demi-droites opposées. Ne confonds jamais « négatif » avec « réduction » : c'est la comparaison entre $|k|$ et 1 qui décide.

■ Construire l'image d'un point sans perdre le signe

Pour construire l'image A' d'un point A par une homothétie de centre O et de rapport k , commence par tracer la droite (OA) . C'est obligatoire : l'image d'un point appartient toujours à cette droite. Calcule ensuite la longueur OA' en utilisant $OA' = |k| \times OA$. Si k est positif, place A' sur la demi-droite $[OA)$. Si k est négatif, place A' sur la demi-droite opposée à $[OA)$. Termine par un contrôle : O , A et A' doivent être alignés, et la distance OA' doit correspondre au calcul. Exemple : $OA = 4$ cm et $k = -\frac{3}{2}$. La longueur cherchée vaut $OA' = \frac{3}{2} \times 4 = 6$ cm. Comme le rapport est négatif, A' est situé de l'autre côté de O par rapport à A , à 6 cm de O . Écrire seulement « $OA' = -6$ cm » serait faux : une longueur est toujours positive ou nulle. Le signe appartient au rapport et à la position sur la droite, pas à la mesure de la longueur. Pour construire l'image d'une figure, construis l'image de chacun de ses sommets. Si un triangle ABC devient $A' B' C'$, relie les images dans le même ordre : $[A' B']$, $[B' C']$ et $[C' A']$. Une construction propre exige des traits de construction visibles, des points nommés et une règle utilisée avec précision. Sur une figure déjà tracée, ne te contente pas d'un placement « à vue » : mesure ou utilise le quadrillage lorsque l'énoncé le permet.

■ Les effets à connaître et leurs conditions

Élément étudié	Effet par une homothétie de rapport k	Ce que tu dois écrire ou vérifier
Distance entre deux points A et B	$A' B' = k \times AB$.	Cette formule concerne une longueur. Utilise $ k $, même si le rapport est négatif.
Longueur OA depuis le centre	$OA' = k \times OA$.	Place ensuite A' du bon côté de O selon le signe de k .
Angle	L'angle image a la même mesure que l'angle initial.	Un angle droit reste droit, un angle de 35° reste un angle de 35° . Cette conservation vaut pour toute homothétie.
Aire d'une surface	L'aire image vaut $k^2 \times$ l'aire initiale.	Le carré rend le résultat positif. Avec $k = -2$, l'aire est multipliée par 4, et non par -2 .
Droite passant par O	Son image est la même droite.	Deux points de cette droite restent alignés avec O : la droite est invariante.
Droite ne passant pas par O	Son image est une droite parallèle.	Pour un segment $[AB]$, le segment image $[A' B']$ est parallèle à $[AB]$.
Figure géométrique	Les côtés correspondants restent parallèles et les angles sont conservés.	Un triangle garde sa forme, mais sa taille dépend de $ k $. Il reste donc semblable à son image.

■ Ton plan de jeu pour les calculs

- Repère les objets correspondants avant tout calcul : A correspond à A' , B à B' , donc $[AB]$ correspond à $[A' B']$. Une mauvaise correspondance entraîne une proportion fautive, même si le calcul est correct.
- Cherche le rapport k donné dans l'énoncé. S'il n'est pas donné, calcule-le avec deux longueurs correspondantes non nulles : $|k| = A' B' \div AB$. Le signe ne peut pas être trouvé avec les seules longueurs ; observe la position des points par rapport au centre.

- Pour une longueur, multiplie par $|k|$ dans le sens figure initiale vers figure image. Si tu reviens de l'image vers la figure initiale, divise par $|k|$. Exemple : $k = -3$ et $A'B' = 21$ cm donnent $AB = 21 \div 3 = 7$ cm.
- Pour une aire, applique k^2 et non $|k|$. Si $k = 1/2$, alors $k^2 = 1/4$: une aire de 40 cm^2 devient 10 cm^2 . L'aire diminue plus vite que les longueurs lors d'une réduction.
- Pour un angle, ne calcule pas avec le rapport. Si un triangle est rectangle en B, son image est rectangle en B' , car la mesure de l'angle B est conservée. L'hypoténuse $[AC]$, opposée à B, devient alors l'hypoténuse $[A'C']$.
- Vérifie l'ordre de grandeur à la fin. Avec $|k|$ supérieur à 1, une longueur image doit être plus grande que la longueur initiale. Avec $|k|$ inférieur à 1, elle doit être plus petite. Une aire est toujours multipliée par un nombre positif : une aire négative signale une erreur.
- Rédige la règle avant les nombres. Écris par exemple : « L'homothétie de rapport $-3/2$ multiplie les longueurs par $3/2$. » Puis effectue le calcul. Cette phrase montre que tu sais pourquoi ton résultat est obtenu.

Relier l'homothétie aux figures semblables et aux démonstrations

Une homothétie conserve les mesures des angles et multiplie toutes les longueurs par le même nombre $|k|$. Une figure et son image ont donc la même forme : elles sont semblables. Cette idée permet de reconnaître une situation d'homothétie dans une configuration où des droites sont parallèles. Si A, O, A' sont alignés, si B, O, B' sont alignés et si (AB) est parallèle à $(A'B')$, alors les triangles OAB et $OA'B'$ ont la même forme. Lorsque les rapports $OA' \div OA$ et $OB' \div OB$ sont égaux, l'homothétie de centre O est justifiée. Attention à la rédaction : constater que deux segments sont parallèles ne suffit pas à annoncer une homothétie. Il faut identifier le centre, les points correspondants et le rapport commun. De même, des longueurs proportionnelles seules ne suffisent pas toujours : les alignements avec le centre doivent être établis. Dans un exercice de brevet, une figure codée peut suggérer ces informations, mais seules les données de l'énoncé et les propriétés démontrées servent de justification. L'homothétie peut aussi s'intégrer à une question de Pythagore. Le théorème de Pythagore s'applique uniquement dans un triangle rectangle. Si ABC est rectangle en A, son hypoténuse est $[BC]$, car elle est opposée à l'angle droit. Après une homothétie, $A'B'C'$ est rectangle en A' et son hypoténuse est $[B'C']$. Tu peux alors soit multiplier les longueurs par $|k|$, soit utiliser Pythagore dans le triangle image, à condition de justifier qu'il est rectangle. Choisis la méthode la plus directe : si le rapport est connu, multiplier les longueurs est souvent plus rapide. Pour finir une réponse, annonce clairement ce que représente ton nombre et son unité. Écris « $A'B' = 12 \text{ cm}$ » pour une longueur ou « l'aire de $A'B'C'$ est égale à 27 cm^2 » pour une aire. Coach Vince te le rappelle : une réponse exacte, non rédigée et sans unité, n'est pas une finale propre.

Exemples résolus

Construire un point image avec un rapport négatif

Énoncé. Le point A est tel que $OA = 4$ cm. Construis son image A' par l'homothétie de centre O et de rapport $-3/2$.

1. Trace la droite (OA) .
2. Calcule la distance au centre : $OA' = |-3/2| \times OA = 3/2 \times 4 = 6$ cm.
3. Le rapport est négatif : A' doit être placé sur la demi-droite opposée à $[OA]$.
4. Place A' à 6 cm de O sur cette demi-droite et vérifie l'alignement de O, A et A' .

Résultat : A' est sur la droite (OA) , de l'autre côté de O par rapport à A, avec $OA' = 6$ cm.

Longueurs, aire et angle dans un triangle image

Énoncé. Le triangle ABC a $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm, $BC = 5$ cm et une aire de 6 cm^2 . Son image $A'B'C'$ est obtenue par une homothétie de rapport $-3/2$. Détermine les longueurs de l'image, son aire et la mesure de l'angle A si l'angle A mesure 90° .

1. Les longueurs sont multipliées par $|-3/2| = 3/2$.
2. $A'B' = 3/2 \times 3 = 4,5$ cm, $A'C' = 3/2 \times 4 = 6$ cm et $B'C' = 3/2 \times 5 = 7,5$ cm.
3. Les aires sont multipliées par $(-3/2)^2 = 9/4$.

4. L'aire de $A' B' C'$ vaut $9/4 \times 6 = 13,5 \text{ cm}^2$.

5. Une homothétie conserve les angles : l'angle A' mesure 90° .

Résultat : $A' B' = 4,5 \text{ cm}$, $A' C' = 6 \text{ cm}$, $B' C' = 7,5 \text{ cm}$, l'aire vaut $13,5 \text{ cm}^2$ et le triangle image est rectangle en A' .

TA SÉANCE D'ENTRAÎNEMENT

1 Les effets essentiels ★★★

Complète chaque affirmation.

1. Par une homothétie de rapport -4 , une longueur est multipliée par ...
2. Par une homothétie de rapport $\frac{1}{2}$, une aire est multipliée par ...
3. L'image du centre O d'une homothétie de centre O est ...

2 Signe et position ★★★

Indique si chaque affirmation est vraie ou fausse.

1. Si le rapport est négatif, le point image est sur la même demi-droite que le point initial.
2. Une homothétie de rapport 1 conserve tous les points.
3. Une homothétie conserve la mesure des angles.

3 Longueurs et aires ★★★

Calcule les grandeurs demandées.

1. $AB = 8$ cm et $A'B'$ est l'image de $[AB]$ par une homothétie de rapport $-\frac{3}{4}$. Calcule $A'B'$.
2. L'aire d'un disque est 28 cm². Il devient l'image par une homothétie de rapport 3 . Calcule l'aire image.
3. $A'B' = 15$ cm est l'image de $[AB]$ par une homothétie de rapport $-\frac{5}{3}$. Calcule AB .

4 Construction rigoureuse ★★★

Décris la construction du point image demandé.

1. $OA = 5$ cm. Construis A' , image de A par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{2}{5}$.

2. $OB = 6$ cm. Construis B' , image de B par l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{1}{2}$.

5 Triangle rectangle et homothétie ★★★

Résous en justifiant les calculs.

ABC est un triangle rectangle en A avec $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm et $BC = 10$ cm. Son image $A'B'C'$ est obtenue par une homothétie de centre O et de rapport $-\frac{1}{2}$. Donne les trois longueurs images et précise le sommet de l'angle droit.

6 Retrouver le rapport ★★★

Détermine le rapport de l'homothétie et justifie son signe.

O, A et A' sont alignés. $OA = 4$ cm et $OA' = 10$ cm. Les points A et A' sont sur des demi-droites opposées d'origine O.

O, B et B' sont alignés. $OB = 12$ cm et $OB' = 3$ cm. Les points B et B' sont sur la même demi-droite d'origine O.

7 Justifier une homothétie ★★★

Rédige une justification complète.

Les points O, A, A' sont alignés avec A et A' sur la même demi-droite d'origine O. Les points O, B, B' sont alignés avec B et B' sur la même demi-droite d'origine O. $OA = 3$ cm, $OA' = 9$ cm, $OB = 5$ cm et $OB' = 15$ cm. Justifie que A' B' est l'image de AB par une homothétie.

8 Finale : longueur, aire et cohérence ★★★

Analyse puis calcule les grandeurs demandées.

1. Un parallélogramme a une base de 14 cm, une hauteur de 9 cm et une aire de 126 cm^2 . Son image est obtenue par une homothétie de rapport $-2/3$. Calcule la base image, la hauteur image et l'aire image.

ÉVALUATION

Réponds avec une rédaction rigoureuse et indique les unités.

Barème : 20 points

1. Donne la définition d'une homothétie de centre O et de rapport k pour l'image A' d'un point A. / 3

2. $OA = 8$ cm et $k = -3/4$. Calcule OA' et précise la position de A' . / 3

3. Un segment de longueur 18 cm a pour image un segment de longueur 30 cm. Calcule |k|. / 2

4. Une figure d'aire 45 cm^2 subit une homothétie de rapport -2 . Calcule l'aire image. / 3

5. ABC est rectangle en A. Son image A' B' C' est obtenue par une homothétie. Indique le sommet de l'angle droit du triangle image et son hypoténuse. / 3

6. O, M, M' sont alignés avec M et M' sur des demi-droites opposées d'origine O. $OM = 7 \text{ cm}$ et $OM' = 21 \text{ cm}$. Détermine le rapport. / 3

7. Justifie que l'image d'une droite ne passant pas par le centre O est une droite parallèle. / 3

Les conseils de Coach Vince

Annonce la propriété

Avant tout calcul, écris la règle utilisée : longueurs multipliées par $|k|$ ou aires multipliées par k^2 . Ta justification doit précéder les nombres.

Fais un contrôle final

Compare ton résultat à la taille attendue selon $|k|$. Vérifie aussi le côté du centre si le rapport est négatif et n'oublie jamais l'unité.

Pour aller plus loin sur exercices-3eme.fr

- › Toutes les fiches de Mathématiques en 3^e · [/mathematiques-3eme/](https://exercices-3eme.fr/mathematiques-3eme/)
- › Le domaine « geometrie » en 3^e · [/mathematiques-3eme/geometrie/](https://exercices-3eme.fr/mathematiques-3eme/geometrie/)
- › Préparer le brevet (dates, épreuves, méthode) · [/brevet/](https://exercices-3eme.fr/brevet/)