



Décomposer un nombre en facteurs premiers en 3^e : cours, méthode et exercices pour le brevet

3^e

Difficulté ★★

⌚ 50 min

Objectif : décomposer sans erreur

Tombe souvent au brevet

Fiche complète + corrigé

Compétence visée (programme cycle 4) : Nombres relatifs, puissances, calcul littéral, racines carrées, arithmétique (PGCD, nombres premiers). les automatismes du brevet.



Coach Vince te résume l'essentiel

- ▶ Un nombre premier possède exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.
- ▶ Décomposer un entier en facteurs premiers, c'est l'écrire comme un produit de nombres premiers.
- ▶ L'ordre des facteurs ne change pas le produit, mais chaque facteur premier doit être écrit avec son exposant si nécessaire.

AU BREVET, ON TE DEMANDE...

Tu dois décomposer un ou plusieurs entiers, puis utiliser cette écriture pour un PGCD, un PPCM, une simplification de racine carrée ou une justification sur un carré parfait.

Type de question Calcul à justifier, question d'automatismes sans calculatrice, ou problème utilisant un PGCD.

Exemple type Décompose 756 en facteurs premiers, puis détermine si 756 est le carré d'un entier.
Alerte piège S'arrêter à une écriture contenant encore un facteur composé, ou oublier de prendre le plus petit exposant pour un PGCD.

LA LEÇON

Reconnaître les briques premières

Avant de décomposer, tu dois savoir ce qu'est un nombre premier. C'est un entier naturel supérieur à 1 qui admet exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même. Ainsi, 2, 3, 5, 7, 11 et 13 sont premiers. Le nombre 2 est le seul nombre premier pair. Dès qu'un nombre pair est supérieur à 2, il est divisible par 2 : il n'est donc pas premier. Le nombre 1 n'est pas premier, car il n'a qu'un seul diviseur positif. Le nombre 0 n'est pas premier non plus : il possède une infinité de diviseurs. Ces deux cas particuliers ne doivent jamais apparaître dans une décomposition en facteurs premiers. Un nombre qui n'est pas premier, et qui est supérieur à 1, est appelé nombre composé. Il peut s'écrire comme un produit de deux entiers strictement supérieurs à 1. Par exemple, $21 = 3 \times 7$: 21 est composé. De même, $36 = 4 \times 9$, donc 36 est composé. Attention : écrire $36 = 4 \times 9$ ne donne pas encore une décomposition en facteurs premiers, car 4 et 9 ne sont pas premiers. Tu dois poursuivre : $4 = 2 \times 2$ et $9 = 3 \times 3$. La forme finale est $36 = 2^2 \times 3^2$. Pour tester rapidement un nombre, utilise des critères de divisibilité, mais seulement quand ils s'appliquent. Un entier est divisible par 2 si son chiffre des unités est pair. Il est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est un multiple de 3. Il est divisible par 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5. Ces critères permettent de trouver un premier facteur ; ils ne remplacent pas la décomposition complète. Coach Vince te le rappelle : ne décide jamais qu'un nombre est premier parce qu'il « a l'air » de l'être. Vérifie méthodiquement ses diviseurs possibles.

Réflexes utiles pour commencer

Observation sur le nombre	Divisibilité à tester	Exemple	Conclusion
Le chiffre des unités est pair	2	$74 \div 2 = 37$	74 est composé
La somme des chiffres est un multiple de 3	3	$123 : 1 + 2 + 3 = 6$	123 est divisible par 3
Le chiffre des unités est 0 ou 5	5	$95 \div 5 = 19$	95 est composé
Aucun critère simple ne convient	7, puis 11, puis les nombres premiers suivants	$91 \div 7 = 13$	$91 = 7 \times 13$

La méthode fiable, étape par étape

Une décomposition en facteurs premiers est une écriture sous la forme d'un produit dans lequel tous les facteurs sont premiers. La méthode la plus sûre consiste à diviser successivement par les plus petits nombres premiers possibles. Commence par 2. Si le nombre n'est pas divisible par 2, essaie 3, puis 5, puis 7, et continue si besoin avec les nombres premiers suivants. Chaque fois qu'une division est exacte, écris le diviseur premier et recommence avec le quotient obtenu. Prends 180. Il est pair, donc $180 = 2 \times 90$. Le quotient 90 est encore pair : $90 = 2 \times 45$. Le nombre 45 n'est pas divisible par 2, mais la somme de ses chiffres vaut 9 : il est divisible par 3. On écrit $45 = 3 \times 15$, puis $15 = 3 \times 5$. Le dernier quotient, 5, est premier. En regroupant les facteurs, $180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3^2 \times 5$. Cette dernière écriture est la décomposition demandée. Tu peux présenter la recherche avec des divisions successives. Pour 180, une colonne de divisions peut donner $180 \div 2 = 90$, puis $90 \div 2 = 45$, puis $45 \div 3 = 15$, puis $15 \div 3 = 5$, puis $5 \div 5 = 1$. Les nombres placés à droite, 2, 2, 3, 3 et 5, sont les facteurs premiers. Arrête-toi lorsque le quotient vaut 1. Ne t'arrête pas lorsque tu obtiens seulement un nombre plus petit : vérifie qu'il est premier. Une autre présentation consiste à construire un arbre de facteurs. Par exemple, 84 peut devenir $84 = 2 \times 42$, puis $42 = 2 \times 21$ et $21 = 3 \times 7$. Les feuilles de l'arbre sont 2, 2, 3 et 7. Tu conclus donc $84 = 2^2 \times 3 \times 7$. Cette méthode est correcte si chaque branche est poursuivie jusqu'à des nombres premiers. Elle devient moins lisible pour les grands nombres ; les divisions successives sont alors souvent plus efficaces.

Règle d'écriture à respecter

Tu peux remplacer des facteurs premiers identiques par une puissance uniquement lorsque le même facteur est répété. Ainsi, $2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3$. L'exposant indique le nombre de fois où le facteur est multiplié par lui-même : $2^3 = 2 \times 2 \times 2$. Une puissance ne signifie jamais une multiplication par l'exposant : 2^3 n'est pas 2×3 .

Contrôle qualité avant de conclure

- Vérifie que chaque facteur final est premier. Dans $2 \times 6 \times 7$, le facteur 6 impose de continuer.
- Range les facteurs dans l'ordre croissant : 2, puis 3, puis 5, puis 7. Cette convention rend ta réponse lisible.
- Regroupe les facteurs identiques avec des puissances : $3 \times 3 \times 3 \times 5$ s'écrit $3^3 \times 5$.
- Recompose mentalement ou par calcul pour vérifier le produit. Pour $2^2 \times 3 \times 7$, calcule $4 \times 3 \times 7 = 84$.
- N'ajoute jamais le facteur 1 : multiplier par 1 ne change pas le nombre et 1 n'est pas premier.

À quoi sert cette décomposition ?

La décomposition en facteurs premiers sert d'abord à comparer la structure de plusieurs nombres. Elle permet notamment de calculer un PGCD, le plus grand diviseur commun, et un PPCM, le plus petit multiple commun. Ces méthodes ne sont valables que lorsque les nombres ont été entièrement décomposés en facteurs premiers. Pour le PGCD, tu gardes seulement les facteurs présents dans toutes les décompositions, avec le plus petit exposant commun. Pour le PPCM, tu gardes tous les facteurs présents, avec le plus grand exposant rencontré. Par exemple, $84 = 2^2 \times 3 \times 7$ et $126 = 2 \times 3^2 \times 7$. Les facteurs communs sont 2, 3 et 7. Le plus petit exposant de 2 est 1, celui de 3 est 1 et celui de 7 est 1. Donc $\text{PGCD}(84 ; 126) = 2 \times 3 \times 7 = 42$. Pour le PPCM, il faut prendre 2^2 , 3^2 et 7, soit $\text{PPCM}(84 ; 126) = 2^2 \times 3^2 \times 7 = 252$.

$126) = 2^2 \times 3^2 \times 7 = 252$. Le PGCD doit diviser chacun des deux nombres ; vérifie : $84 \div 42 = 2$ et $126 \div 42 = 3$. Le PPCM doit être un multiple des deux nombres ; $252 \div 84 = 3$ et $252 \div 126 = 2$. Cette écriture aide aussi à simplifier certaines racines carrées. Chercher les facteurs par paires est utile, car $\sqrt{a^2 \times b} = a \times \sqrt{b}$ uniquement si a et b sont des nombres positifs ou nuls. Avec $72 = 2^3 \times 3^2 = 2^2 \times 3^2 \times 2$, on obtient $\sqrt{72} = \sqrt{(2^2 \times 3^2 \times 2)} = 2 \times 3 \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$. Tu dois identifier des carrés parfaits dans la décomposition, pas inventer une séparation de racine. Enfin, une écriture en facteurs premiers donne un critère exact pour reconnaître un carré parfait. Un entier positif est un carré parfait si, dans sa décomposition en facteurs premiers, tous les exposants sont pairs. Par exemple, $900 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2$: 900 est un carré parfait, et $\sqrt{900} = 2 \times 3 \times 5 = 30$. En revanche, $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$: l'exposant de 5 vaut 1, donc 180 n'est pas un carré parfait. Voilà le plan de jeu : décomposer proprement, interpréter les exposants, puis choisir l'outil adapté à la question.

Exemples résolus

Décomposer 252

Énoncé. Écris 252 comme produit de facteurs premiers.

1. 252 est pair : $252 = 2 \times 126$.
2. 126 est pair : $126 = 2 \times 63$.
3. 63 est divisible par 3 car $6 + 3 = 9$: $63 = 3 \times 21$.
4. $21 = 3 \times 7$ et 7 est premier.
5. Regroupe les facteurs identiques : $252 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 = 2^2 \times 3^2 \times 7$.

Résultat : $252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$.

Calculer un PGCD par décomposition

Énoncé. Calcule PGCD(144 ; 210) en utilisant les décompositions en facteurs premiers.

1. $144 = 2 \times 72 = 2 \times 2 \times 36 = 2 \times 2 \times 2 \times 18 = 2^4 \times 3^2$.
2. $210 = 2 \times 105 = 2 \times 3 \times 35 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$.
3. Les seuls facteurs premiers communs sont 2 et 3, chacun avec l'exposant 1.
4. Le PGCD est le produit des facteurs communs pris avec leur plus petit exposant : 2×3 .

Résultat : PGCD(144 ; 210) = 6.

Simplifier une racine carrée

Énoncé. Simplifie $\sqrt{200}$.

1. Décompose 200 : $200 = 2 \times 100 = 2 \times 2^2 \times 5^2 = 2^3 \times 5^2$.
2. Isole les facteurs dont l'exposant est pair : $200 = 2^2 \times 5^2 \times 2$.
3. Utilise $\sqrt{a^2 \times b} = a \times \sqrt{b}$ pour des nombres positifs ou nuls.
4. $\sqrt{200} = \sqrt{(2^2 \times 5^2 \times 2)} = 2 \times 5 \times \sqrt{2}$.

Résultat : $\sqrt{200} = 10\sqrt{2}$.

Les conseils de Coach Vince



Une conclusion vérifiable

Écris la chaîne de calcul puis la forme finale avec les puissances. Recompose le produit avant de poser ton résultat : c'est ta vérification de rigueur.



La règle avant l'application

Pour un PGCD ou une racine carrée, commence par les décompositions complètes. Ensuite seulement, cite la règle utilisée et applique-la aux exposants.

Erreurs fréquentes

Erreur à éviter	Pourquoi	Le bon réflexe
Écrire $48 = 6 \times 8$ comme décomposition en facteurs premiers.	6 et 8 sont composés : la décomposition n'est pas terminée.	Décompose chaque facteur jusqu'à n'obtenir que des nombres premiers : $48 = 2^4 \times 3$.
Écrire $72 = 2^2 \times 3$.	$2^2 \times 3 = 12$, donc le produit ne redonne pas 72.	Contrôle toujours le produit final : $72 = 2^3 \times 3^2$.
Considérer 1 comme un facteur premier.	1 n'a pas exactement deux diviseurs positifs.	Commence ta liste de nombres premiers par 2 et n'écris jamais $\times 1$ dans la réponse finale.

TA SÉANCE D'ENTRAÎNEMENT

1 Les bases ★★

Indique si chaque nombre est premier ou composé.

1. 29
2. 51
3. 1

2 Première série ★★

Décompose chaque entier en facteurs premiers.

1. 40
2. 63
3. 70

3 Écrire avec des puissances ★★

Complète chaque égalité avec la bonne écriture.

1. $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = \dots$
2. $5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7 = \dots$

4 Vérifie les affirmations ★★

Indique si chaque affirmation est vraie ou fausse, puis corrige-la si nécessaire.

1. $84 = 2^2 \times 3 \times 7$ est une décomposition en facteurs premiers.
2. $90 = 2 \times 3 \times 15$ est une décomposition en facteurs premiers.
3. $2^5 = 10$.

5 Facteurs communs ★★

Calcule chaque PGCD en utilisant les décompositions en facteurs premiers.

1. PGCD(72 ; 120)
2. PGCD(98 ; 147)

6 Extraire les carrés parfaits ★★

Simplifie chaque racine carrée en utilisant une décomposition en facteurs premiers.

1. $\sqrt{108}$
2. $\sqrt{180}$

7 Analyse les exposants ★★

Détermine si chaque entier est un carré parfait et justifie.

- 441
- 540

8 Finale : former des groupes ★★★

Résous le problème en justifiant avec un PGCD.

On veut répartir 168 jetons rouges et 252 jetons bleus en un nombre maximal de sachets identiques, sans reste. Combien de sachets peut-on former et que contient chaque sachet ?

ÉVALUATION

Rédige les calculs nécessaires et donne des réponses finales lisibles.

Barème : 20 points

1. Indique si 97 est premier ou composé. / 2
2. Décompose 168 en facteurs premiers. / 3
3. Décompose 450 en facteurs premiers. / 3
4. Calcule PGCD(168 ; 450) à l'aide des décompositions précédentes. / 4
5. Simplifie $\sqrt{450}$. / 3
6. Justifie que 576 est un carré parfait et calcule sa racine carrée. / 5

Quiz de révision

1. Quelle écriture est une décomposition en facteurs premiers de 150 ?

A) $2 \times 3 \times 25$ B) $2 \times 3 \times 5^2$ C) 6×5^2 D) $2^2 \times 3 \times 5$

2. Pourquoi le nombre 1 n'est-il pas premier ?

A) Il est pair B) Il est négatif C) Il n'a qu'un diviseur positif D) Il est divisible par 3

3. Quelle est la décomposition de 96 ?

A) $2^5 \times 3$ B) $2^4 \times 3$ C) $2^3 \times 3^2$ D) $2^5 \times 6$

4. Quel nombre est premier ?

A) 39 B) 49 C) 57 D) 59

5. Si $72 = 2^3 \times 3^2$, quelle est la valeur de $\sqrt{72}$ simplifiée ?

A) $6\sqrt{2}$ B) $6\sqrt{3}$ C) $12\sqrt{2}$ D) 36

6. Quel est le PGCD de 60 et 84 ?

A) 6 B) 12 C) 24 D) 420

7. Quelle affirmation est correcte ?

A) $2^3 = 2 \times 3$ B) $3^2 = 3 \times 3$ C) $5^2 = 5 \times 2$ D) $7^3 = 7 + 7 + 7$

8. Lequel de ces nombres est un carré parfait ?

A) $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ B) $252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$ C) $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ D) $900 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2$

9. Dans une méthode de divisions successives, quand la décomposition est-elle terminée ?

A) Quand le quotient vaut 2 B) Quand le quotient vaut 1 C) Quand on a divisé par 10
D) Quand le nombre devient impair

Guide pour les parents

Laissez votre adolescent chercher seul, puis demandez-lui d'expliquer chaque division choisie.

- Faites-lui vérifier qu'aucun facteur composé ne reste dans sa réponse finale et demandez-lui de recomposer le produit.
- Proposez un nombre différent à décomposer, sans donner le premier diviseur : il doit mobiliser les critères de divisibilité et sa méthode.

Questions fréquentes

Q. Dois-je écrire les facteurs dans un ordre précis ?

R. Le produit ne change pas si tu modifies l'ordre, mais écris-les dans l'ordre croissant. Ta copie sera plus claire et les puissances seront faciles à repérer.

Q. Comment savoir que je peux m'arrêter ?

R. Tu peux t'arrêter lorsque tous les facteurs écrits sont premiers. Dans la méthode par divisions successives, le dernier quotient doit être 1.

Q. Le nombre 1 peut-il apparaître dans la réponse ?

R. Non. Il peut apparaître comme dernier quotient dans les divisions successives, mais il ne fait pas partie de la décomposition.

Q. La calculatrice est-elle utile pour cette notion au brevet ?

R. Elle peut aider à contrôler un produit, mais tu dois savoir reconnaître des divisions simples et rédiger une décomposition sans dépendre d'elle.

CORRIGÉ

Exercice 1 : Les bases

1. 29 est premier. Il n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5.
2. 51 est composé : $51 = 3 \times 17$. $5 + 1 = 6$, donc 51 est divisible par 3.
3. 1 n'est ni premier ni composé. Il n'a qu'un seul diviseur positif.

Exercice 2 : Première série

1. $40 = 2^3 \times 5$. $40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$.
2. $63 = 3^2 \times 7$. $63 = 3 \times 3 \times 7$.
3. $70 = 2 \times 5 \times 7$. Les trois facteurs sont premiers.

Exercice 3 : Écrire avec des puissances

1. $2^4 \times 3$. Le facteur 2 apparaît quatre fois.
2. $5^2 \times 7^3$. Les exposants comptent les répétitions.

Exercice 4 : Vérifie les affirmations

1. Vrai. 2, 3 et 7 sont premiers et $2^2 \times 3 \times 7 = 84$.
2. Faux. $90 = 2 \times 3^2 \times 5$. 15 n'est pas premier.
3. Faux. $2^5 = 32$. $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$.

Exercice 5 : Facteurs communs

1. $72 = 2^3 \times 3^2$ et $120 = 2^3 \times 3 \times 5$. Les facteurs communs avec les plus petits exposants sont 2^3 et 3. Donc $\text{PGCD}(72 ; 120) = 2^3 \times 3 = 24$. Pour un PGCD, conserve les facteurs communs avec le plus petit exposant.
2. $98 = 2 \times 7^2$ et $147 = 3 \times 7^2$. Le facteur commun est 7^2 . Donc $\text{PGCD}(98 ; 147) = 49$. Le facteur 7 apparaît deux fois dans chaque décomposition.

Exercice 6 : Extraire les carrés parfaits

1. $108 = 2^2 \times 3^3 = 2^2 \times 3^2 \times 3$. Donc $\sqrt{108} = 2 \times 3 \times \sqrt{3} = 6\sqrt{3}$. Chaque paire de facteurs identiques sort de la racine.
2. $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$. Donc $\sqrt{180} = 2 \times 3 \times \sqrt{5} = 6\sqrt{5}$. Les facteurs 2^2 et 3^2 sont des carrés parfaits.

Exercice 7 : Analyse les exposants

1. $441 = 3^2 \times 7^2$. Tous les exposants de sa décomposition en facteurs premiers sont pairs. Donc 441 est un carré parfait ; $\sqrt{441} = 3 \times 7 = 21$. Un entier positif est un carré parfait si tous ses exposants sont pairs.
2. $540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$. Les exposants 3 et 1 ne sont pas pairs. Donc 540 n'est pas un carré parfait. Un seul exposant impair suffit à exclure un carré parfait.

Exercice 8 : Finale : former des groupes

1. $168 = 2^3 \times 3 \times 7$ et $252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$. Le nombre maximal de sachets est le PGCD de 168 et 252 : $\text{PGCD}(168 ; 252) = 2^2 \times 3 \times 7 = 84$. On peut former 84 sachets. Chaque sachet contient $168 \div 84 = 2$ jetons rouges et $252 \div 84 = 3$ jetons bleus. Le nombre maximal de groupes identiques est le PGCD des deux quantités.

Corrigé de l'évaluation

1. 97 est premier. / 2
2. $168 = 2^3 \times 3 \times 7$. / 3
3. $450 = 2 \times 3^2 \times 5^2$. / 3
4. $168 = 2^3 \times 3 \times 7$ et $450 = 2 \times 3^2 \times 5^2$. Les facteurs communs sont 2 et 3. Donc $\text{PGCD}(168 ; 450) = 6$. / 4
5. $450 = 2 \times 3^2 \times 5^2$, donc $\sqrt{450} = 3 \times 5 \times \sqrt{2} = 15\sqrt{2}$. / 3
6. $576 = 2^6 \times 3^2$. Tous les exposants sont pairs, donc 576 est un carré parfait. $\sqrt{576} = 2^3 \times 3 = 24$. / 5

Réponses du quiz

1. **B) $2 \times 3 \times 5^2$** . $150 = 2 \times 3 \times 5 \times 5 = 2 \times 3 \times 5^2$.
2. **C) Il n'a qu'un diviseur positif**. Un nombre premier doit avoir exactement deux diviseurs positifs.
3. **A) $2^5 \times 3$** . $96 = 32 \times 3 = 2^5 \times 3$.
4. **D) 59**. 59 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 7.
5. **B) $6\sqrt{3}$** . $72 = 2^2 \times 3^2 \times 2$, donc $\sqrt{72} = 2 \times 3 \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$.
6. **B) 12**. $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ et $84 = 2^2 \times 3 \times 7$, donc le PGCD est $2^2 \times 3 = 12$.
7. **B) $3^2 = 3 \times 3$** . Une puissance correspond à une multiplication répétée du même facteur.

8. D) $900 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2$. Dans 900, tous les exposants sont pairs.

9. B) Quand le quotient vaut 1. Le quotient final égal à 1 signifie que tous les facteurs premiers ont été extraits.

Pour aller plus loin sur exercices-3eme.fr

› **Toutes les fiches de Mathématiques en 3^e** · [/mathematiques-3eme/](https://exercices-3eme.fr/mathematiques-3eme/)

› **Le domaine « nombres-calcul » en 3^e** · [/mathematiques-3eme/nombres-calcul/](https://exercices-3eme.fr/mathematiques-3eme/nombres-calcul/)

› **Préparer le brevet (dates, épreuves, méthode)** · [/brevet/](https://exercices-3eme.fr/brevet/)