# La racine carrée en 3e : cours, exercices et méthode pour le brevet

3e | Difficulté ★★☆ | ⏱ 45 min | Objectif : La racine carrée | Tombe souvent au brevet | Éco-encre (N&B)

**Prénom :** .....  **Date :** .....

**Compétence visée (programme cycle 4) :** Nombres relatifs, puissances, calcul littéral, racines carrées, arithmétique (PGCD, nombres premiers). les automatismes du brevet.

**Coach Vince te résume l'essentiel**

- La racine carrée de a, avec a ≥ 0, est l'unique nombre positif ou nul dont le carré vaut a.
- Tu cherches d'abord si le nombre sous la racine est un carré parfait, puis tu simplifies seulement avec des produits.
- Une racine carrée donne toujours un résultat positif ou nul : garde ce contrôle jusqu'à la ligne finale, Coach Vince veille au détail.

## AU BREVET, ON TE DEMANDE...

Tu dois calculer ou simplifier une racine carrée, résoudre une équation du type $x^2 = a$, ou utiliser une racine dans un calcul de longueur avec Pythagore.

| | |
|---|---|
| **Type de question** | Calcul à justifier, QCM d'automatismes sans calculatrice, résolution d'équation ou problème géométrique. |
| **Exemple type** | Simplifie $\sqrt{252}$, puis résous l'équation $x^2 = 252$ en donnant toutes les solutions exactes. |
| **Alerte piège** | Confondre $\sqrt{a}$ avec les solutions de $x^2 = a$, ou écrire une égalité approchée avec le signe =. |

# LA LEÇON

## Comprendre ce que signifie $\sqrt{a}$

La racine carrée est l'opération qui permet de retrouver un nombre à partir de son carré. Pour tout nombre a positif ou nul, $\sqrt{a}$ est l'unique nombre positif ou nul dont le carré est égal à a. Ainsi, $\sqrt{25} = 5$ car $5^2 = 25$. On n'écrit pas $\sqrt{25} = -5$ : pourtant, $(-5)^2$ vaut aussi 25, mais la racine carrée elle-même désigne toujours le résultat positif ou nul. Cette convention est essentielle. Elle évite de confondre $\sqrt{25}$ et les solutions de l'équation $x^2 = 25$. Dans cette équation, deux nombres conviennent : 5 et −5. En revanche, $\sqrt{25}$ vaut uniquement 5.Dans les nombres réels, $\sqrt{a}$ existe seulement si a ≥ 0. Tu peux donc calculer $\sqrt{0} = 0$, $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{36} = 6$, $\sqrt{49} = 7$, $\sqrt{64} = 8$, $\sqrt{81} = 9$, $\sqrt{100} = 10$, $\sqrt{121} = 11$ et $\sqrt{144} = 12$. Ces carrés parfaits doivent devenir des automatismes : sans eux, tu perds du temps dans des calculs qui devraient être immédiats. À l'inverse, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ou $\sqrt{10}$ ne sont pas des nombres entiers. Tu peux les conserver sous cette forme exacte ou, si une consigne le demande, utiliser une valeur approchée avec le signe ≈.Attention au vocabulaire. Dans $\sqrt{72}$, le nombre 72 est appelé le nombre sous la racine. L'expression $\sqrt{72}$ est une écriture exacte. Écrire $\sqrt{72} \approx 8{,}49$ donne une approximation, car $8{,}49^2$ n'est pas exactement égal à 72. Ne remplace jamais une valeur exacte par une approximation si la question demande de simplifier, de calculer exactement ou de donner une forme exacte. Ton premier réflexe doit être : « Est-ce un carré parfait ? »

## Réflexes de calcul à connaître

| Écriture | Résultat ou propriété | Justification |
|---|---|---|
| $\sqrt{49}$ | 7 | 7 est positif et $7^2 = 49$. |
| $\sqrt{0}$ | 0 | $0^2 = 0$ ; zéro est donc sa propre racine carrée. |
| $\sqrt{(-9)}$ | n'existe pas dans les nombres réels | Aucun carré de nombre réel ne peut être négatif. |
| $\sqrt{(7^2)}$ | 7 | 7 est positif, donc $\sqrt{(7^2)} = 7$. |
| $\sqrt{((-7)^2)}$ | 7 | Le carré vaut 49, et $\sqrt{49}$ est le nombre positif 7. |
| $(\sqrt{11})^2$ | 11 | Le carré et la racine carrée se compensent lorsque le nombre sous la racine est positif ou nul. |

## Simplifier sans faire de faux raccourci

- Pour simplifier $\sqrt{a}$, cherche un facteur qui soit un carré parfait. Par exemple, $72 = 36 \times 2$. Comme 36 et 2 sont positifs, $\sqrt{72} = \sqrt{(36 \times 2)} = \sqrt{36} \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$. La forme $6\sqrt{2}$ est plus simple que $\sqrt{72}$ car aucun facteur carré parfait supérieur à 1 ne reste sous la racine.
- La règle $\sqrt{(a \times b)} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ est valable seulement lorsque $a \geq 0$ et $b \geq 0$. Elle sert à sortir un carré parfait de la racine. Pour $\sqrt{180}$, écris $180 = 36 \times 5$, puis $\sqrt{180} = 6\sqrt{5}$. Tu peux aussi utiliser $180 = 9 \times 20$, mais tu obtiens $3\sqrt{20}$ : il faut alors continuer, car $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.
- Pour une fraction positive, $\sqrt{(a \div b)} = \sqrt{a} \div \sqrt{b}$ est valable si $a \geq 0$ et $b > 0$. Par exemple, $\sqrt{(9 \div 16)} = \sqrt{9} \div \sqrt{16} = 3 \div 4$. Vérifie toujours que le dénominateur n'est pas nul avant d'utiliser une écriture fractionnaire.
- Ne distribue jamais une racine carrée sur une addition ou une soustraction. $\sqrt{(9 + 16)} = \sqrt{25} = 5$, alors que $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$. Ces deux résultats sont différents. De même, $\sqrt{(25 - 9)} = 4$, tandis que $\sqrt{25} - \sqrt{9} = 2$. La propriété du produit ne devient pas une propriété de la somme.
- Tu peux multiplier des racines carrées si les nombres sous les racines sont positifs ou nuls : $\sqrt{3} \times \sqrt{12} = \sqrt{36} = 6$. Dans une expression comme $2\sqrt{3} \times 5\sqrt{12}$, commence par les coefficients : $2 \times 5 = 10$. Puis $\sqrt{3} \times \sqrt{12} = 6$. Le résultat est 60. Range ton calcul en étapes : la lisibilité évite les erreurs.
- Pour comparer deux racines carrées, compare les nombres sous les racines lorsque ces nombres sont positifs ou nuls. Comme $13 < 17$, on a $\sqrt{13} < \sqrt{17}$. En effet, la fonction racine carrée conserve l'ordre sur les nombres positifs ou nuls. N'utilise pas cette idée avec des nombres négatifs, car leur racine carrée réelle n'existe pas.

## Méthode : simplifier une racine carrée

Prends $\sqrt{200}$. Étape 1 : cherche un carré parfait qui divise 200. Tu peux écrire $200 = 100 \times 2$. Étape 2 : applique la règle du produit, car 100 et 2 sont positifs : $\sqrt{200} = \sqrt{(100 \times 2)} = \sqrt{100} \times \sqrt{2}$. Étape 3 : calcule la racine carrée du carré parfait : $\sqrt{100} = 10$. Tu obtiens donc $\sqrt{200} = 10\sqrt{2}$. Étape 4 : vérifie que 2 ne contient plus de facteur carré parfait supérieur à 1 : la simplification est terminée.Pour choisir le bon facteur, pense aux carrés parfaits 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 et 144. Avec $\sqrt{75}$, $75 = 25 \times 3$ donne directement $\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$. Avec $\sqrt{48}$, $48 = 16 \times 3$ donne $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$. Ne cherche pas obligatoirement le plus grand carré parfait dès le départ, mais assure-toi de finir le travail. Par exemple, $\sqrt{108} = \sqrt{(9 \times 12)} = 3\sqrt{12} = 6\sqrt{3}$ : la première transformation est correcte, mais elle n'est pas encore simplifiée.

## Résoudre, interpréter et contrôler

Les racines carrées interviennent souvent dans les équations du type $x^2 = a$. Commence par regarder le signe de a. Si $a < 0$, l'équation n'a pas de solution dans les nombres réels, car un carré est toujours positif ou nul. Si $a = 0$, l'unique solution est $x = 0$. Si $a > 0$, l'équation possède deux solutions opposées : $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$. Ainsi, $x^2 = 49$ a pour solutions $x = 7$ et $x = -7$. La présence de deux solutions ne contredit pas le fait que $\sqrt{49} = 7$ : la racine carrée

est positive, tandis que l'équation demande quels nombres ont le carré 49.En géométrie, la racine carrée apparaît notamment avec le théorème de Pythagore. Ce théorème s'applique uniquement dans un triangle rectangle. Si un triangle ABC est rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$, car BC est l'hypoténuse. Si AB = 6 cm et AC = 8 cm, alors $BC^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$. Donc $BC = \sqrt{100} = 10$ cm. La longueur est positive : tu ne peux jamais conclure BC = −10 cm. Si le résultat n'est pas un entier, garde une écriture exacte, par exemple $BC = \sqrt{58}$ cm, sauf si l'énoncé réclame une valeur approchée.Avec une calculatrice, utilise la touche $\sqrt{\ }$ seulement après avoir écrit correctement le nombre ou l'expression sous la racine. Pour vérifier une approximation, élève-la au carré. Si tu annonces $\sqrt{50} \approx 7{,}1$, alors $7{,}1^2 = 50{,}41$ : l'ordre de grandeur est cohérent, mais l'égalité exacte est fausse. En rédaction, distingue toujours « = » pour une égalité exacte et « ≈ » pour une valeur approchée. C'est un réflexe de rigueur qui fait la différence dans la finale.

## Exemples résolus

**Simplifier une racine carrée**

**Énoncé.** Écris $\sqrt{300}$ sous la forme $a\sqrt{b}$, où b ne contient aucun facteur carré parfait supérieur à 1.

1. Je cherche un carré parfait qui divise 300 : 300 = 100 × 3.
2. Comme 100 et 3 sont positifs, $\sqrt{300} = \sqrt{(100 \times 3)} = \sqrt{100} \times \sqrt{3}$.
3. Or $\sqrt{100} = 10$, donc $\sqrt{300} = 10\sqrt{3}$.
4. Le nombre 3 ne possède pas de facteur carré parfait supérieur à 1 : la forme est simplifiée.

**Résultat :** $\sqrt{300} = 10\sqrt{3}$.

**Résoudre une équation du type $x^2 = a$**

**Énoncé.** Résous l'équation $x^2 = 27$.

1. Le nombre 27 est positif : l'équation admet deux solutions opposées.
2. Les solutions sont $x = \sqrt{27}$ ou $x = -\sqrt{27}$.
3. Je simplifie $\sqrt{27}$ : 27 = 9 × 3, donc $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$.
4. Je remplace dans les deux solutions.

**Résultat :** Les solutions sont $x = 3\sqrt{3}$ et $x = -3\sqrt{3}$.

**Calculer une longueur avec Pythagore**

**Énoncé.** Le triangle DEF est rectangle en D. DE = 9 cm et DF = 12 cm. Calcule EF.

1. Le triangle DEF est rectangle en D, donc je peux appliquer le théorème de Pythagore.
2. EF est l'hypoténuse, donc $EF^2 = DE^2 + DF^2$.
3. $EF^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$.
4. EF est une longueur positive, donc $EF = \sqrt{225} = 15$.

**Résultat :** EF = 15 cm.

# TA SÉANCE D'ENTRAÎNEMENT

## 1 Les carrés parfaits ★☆☆

*Calcule chaque racine carrée.*

**1.** $\sqrt{81}$ .....

**2.** $\sqrt{121}$ .....

**3.** $\sqrt{0}$ .....

## 2 Carré ou racine ★☆☆

*Complète chaque égalité.*

**1.** $...^2 = 169$ .....

**2.** $\sqrt{196} = ...$ .....

**3.** $(\sqrt{17})^2 = ...$ .....

## 3 Garde la règle ★☆☆

*Indique si chaque affirmation est vraie ou fausse.*

**1.** $\sqrt{(9 + 16)} = \sqrt{9} + \sqrt{16}$. .....

**2.** $\sqrt{(36 \times 2)} = 6\sqrt{2}$. .....

**3.** $\sqrt{((-5)^2)} = 5$. .....

## 4 Sortir le carré parfait ★★☆

*Simplifie chaque expression.*

**1.** $\sqrt{72}$ .....

**2.** $\sqrt{75}$ .....

**3.** $\sqrt{147}$ .....

## 5 Calcul exact ★★☆

*Calcule et donne un résultat exact.*

**1.** $\sqrt{49} + \sqrt{16}$ .....

**2.** $\sqrt{3} \times \sqrt{12}$ .....

**3.** $2\sqrt{27}$ .....

## 6 Deux solutions, une ou aucune ★★☆

*Résous chaque équation dans les nombres réels.*

$x^2 = 64$

$x^2 = 0$

$x^2 = -4$

### 7 Longueur d'une hypoténuse ★★★

*Rédige le calcul de la longueur demandée.*

Le triangle GHI est rectangle en G. GH = 5 cm et GI = 11 cm. Calcule HI sous forme exacte.

### 8 Finale exacte ★★★

*Simplifie puis résous l'équation en rédigeant les étapes.*

Simplifie $\sqrt{432}$, puis résous $x^2 = 432$.

## ÉVALUATION

*Rédige les calculs utiles et garde les résultats exacts lorsque cela est possible.*

**Barème : 20 points**

**1.** Calcule $\sqrt{144}$. / 2

**2.** Simplifie $\sqrt{108}$. / 3

**3.** Indique si l'égalité $\sqrt{(25 + 11)} = \sqrt{25} + \sqrt{11}$ est vraie ou fausse, puis justifie. / 3

**4.** Résous $x^2 = 20$. / 4

**5.** Le triangle JKL est rectangle en J. JK = 8 cm et JL = 15 cm. Calcule KL. / 5

**6.** Simplifie $\sqrt{500}$. / 3

## Les conseils de Coach Vince

**Annonce la règle utile**
Avant une simplification, écris la décomposition choisie, par exemple 72 = 36 × 2. Avant Pythagore, précise que le triangle est rectangle : ta règle doit toujours avoir une raison d'être.

**Contrôle le signe final**
Une racine carrée et une longueur sont positives ou nulles. Pour une équation $x^2 = a$ avec $a > 0$, pense en revanche aux deux solutions opposées.

**Pour aller plus loin sur exercices-3eme.fr**

- **Toutes les fiches de Mathématiques en 3e** · /mathematiques-3eme/
- **Le domaine « nombres-calcul » en 3e** · /mathematiques-3eme/nombres-calcul/
- **Préparer le brevet (dates, épreuves, méthode)** · /brevet/