



La symétrie centrale en 3^e : cours, exercices et méthode pour le brevet

3^e

Difficulté ★★★



45 min

Objectif : La symétrie centrale

Tombe souvent au brevet

Fiche complète + corrigé

Compétence visée (programme cycle 4) : Pythagore, Thalès, trigonométrie, transformations, géométrie dans l'espace (solides, sections, agrandissement-réduction).



Coach Vince te résume l'essentiel

- ▶ Dans une symétrie centrale de centre O , O est le milieu du segment qui relie un point à son image.
- ▶ Une symétrie centrale correspond à un demi-tour autour de son centre.
- ▶ Pour construire une image, aligne le point, le centre et l'image, puis reporte exactement la même distance de l'autre côté du centre.

AU BREVET, ON TE DEMANDE...

Tu dois construire une image, reconnaître un centre de symétrie ou justifier qu'un point est le milieu de segments associés. La notion peut aussi servir à démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme.

Type de question Construction géométrique à la règle et au compas, calcul de coordonnées, justification rédigée ou QCM d'automatismes.

Exemple type Dans le repère, $A(-1 ; 3)$ a pour image $A'(7 ; -5)$ par une symétrie centrale de centre O .

Calcule les coordonnées de O et justifie.

Alerte piège Oublier l'alignement dans une justification, ou placer l'image du même côté du centre parce que seule la distance a été contrôlée.

LA LEÇON

Le demi-tour qui transforme une figure

La symétrie centrale est une transformation géométrique définie par un centre, noté le plus souvent O . Elle envoie chaque point A sur un point A' , appelé image de A . Dire que A' est l'image de A par la symétrie centrale de centre O signifie exactement que O est le milieu du segment $[AA']$. Cette définition contient deux informations indispensables : les points A , O et A' sont alignés, et les longueurs OA et OA' sont égales. Si l'une de ces deux conditions manque, la construction est fautive. Visualise un demi-tour : tu fais tourner la figure de 180° autour de O . Le point A se retrouve alors de l'autre côté de O , à la même distance. Contrairement à une symétrie axiale, il n'y a pas de droite-miroir : seul le point O commande la transformation. Le centre O est son propre image, car O est le milieu du segment $[OO]$. Une figure peut aussi avoir un centre de symétrie : après un demi-tour autour de ce point, elle se superpose exactement à elle-même. Le parallélogramme possède un centre de symétrie, situé à l'intersection de ses diagonales. Le cercle possède pour centre de symétrie son centre. En revanche, un triangle non aplati n'a pas de centre de symétrie : un demi-tour ne le superpose pas à lui-même. Ne confonds pas l'image d'un point et le centre de la transformation. Dans la phrase « A' est l'image de A par la symétrie de centre O », A est le point de départ, A' est le point d'arrivée et O est le milieu.

■ Critère à connaître parfaitement

A' est l'image de A par la symétrie centrale de centre O si, et seulement si, O est le milieu de [AA']. Tu peux donc prouver une image symétrique en démontrant l'alignement de A, O et A', puis l'égalité $OA = OA'$.

■ Construire l'image d'un point : le plan de jeu

- Repère le point A et le centre O. Place ta règle de façon à tracer la droite (AO).
- Mesure la longueur OA au compas, ou lis-la sur le quadrillage. Ne te contente pas d'un placement approximatif.
- Sur la droite (AO), place A' de l'autre côté de O, avec $OA' = OA$. L'ordre des points doit être A, O, A' ou A', O, A.
- Vérifie que O est bien entre A et A'. Si A et A' sont du même côté de O, tu as effectué une erreur de sens.
- Pour une figure, construis séparément l'image de chaque sommet, puis relie les images dans le même ordre. L'image de ABC est A'B'C', pas une figure dessinée à l'œil.

■ Ce que conserve la symétrie centrale

Objet de départ	Image par la symétrie de centre O	Propriété utile
Un segment [AB]	Le segment [A'B']	$A'B' = AB$ et les segments sont parallèles, sauf s'ils sont portés par une même droite.
Une droite ne passant pas par O	Une droite parallèle	Son image est une droite parallèle à la droite de départ.
Une droite passant par O	La même droite	La droite est globalement conservée, même si ses points changent de place.
Un angle	Un angle de même mesure	La nature de l'angle est conservée : droit, aigu ou obtus.
Un cercle de centre C et de rayon r	Un cercle de centre C' et de rayon r	Le rayon est conservé ; seul le centre est transformé.
Un polygone	Un polygone de même forme et de même taille	Les longueurs, l'alignement, le parallélisme et les aires sont conservés.

■ Lire une figure et justifier sans saut logique

Une réponse de géométrie doit montrer la règle utilisée. Si l'on te demande de justifier que deux points sont symétriques par rapport à O, ne réponds pas seulement « parce que c'est visible ». Rédige : « Les points A, O et A' sont alignés et $OA = OA'$. Donc O est le milieu de [AA']. Par conséquent, A' est l'image de A par la symétrie centrale de centre O. » Cette rédaction fonctionne seulement si l'alignement et l'égalité sont établis par les données, par une mesure demandée ou par une propriété déjà démontrée. Lorsque O est le milieu de [AC] et aussi le milieu de [BD], les diagonales [AC] et [BD] du quadrilatère ABCD se coupent en leur milieu. Tu peux alors conclure que ABCD est un parallélogramme. Cette propriété est souvent associée à la symétrie centrale : dans un parallélogramme, les sommets opposés sont symétriques par rapport au point d'intersection des diagonales. Attention au vocabulaire : les côtés opposés d'un parallélogramme sont parallèles et de même longueur ; ils ne sont pas forcément sur la même droite. Si tu connais l'image de A et de B, tu peux identifier l'image de la droite (AB) : c'est la droite (A'B'). Si O appartient à (AB), alors O appartient aussi à (A'B') et la droite obtenue est la même. Si O n'appartient pas à (AB), les deux droites sont parallèles. Cette distinction évite une conclusion trop rapide. Une symétrie centrale conserve les mesures, mais elle ne conserve généralement pas la position d'une figure : une droite, un segment ou un cercle est déplacé, sauf dans certains cas particuliers liés au centre.

■ Quadrillage, coordonnées et constructions plus complexes

Sur un quadrillage, la méthode la plus sûre consiste à compter le déplacement de A vers O, puis à reproduire exactement ce déplacement de O vers A'. Si, pour aller de A à O, tu avances de 3 carreaux vers la droite et montes

de 2 carreaux, alors pour aller de O à A' tu avances encore de 3 carreaux vers la droite et montes encore de 2 carreaux. Tu réalises ainsi deux déplacements identiques. Avec des coordonnées, la même idée devient un calcul de milieu. Si A a pour coordonnées $(x_A ; y_A)$, A' a pour coordonnées $(x_{A'} ; y_{A'})$ et O a pour coordonnées $(x_O ; y_O)$, alors $x_O = (x_A + x_{A'}) \div 2$ et $y_O = (y_A + y_{A'}) \div 2$. Pour trouver A' lorsque A et O sont connus, utilise $x_{A'} = 2 \times x_O - x_A$ et $y_{A'} = 2 \times y_O - y_A$. Par exemple, si A(-2 ; 5) et O(1 ; 2), alors $x_{A'} = 2 \times 1 - (-2) = 4$ et $y_{A'} = 2 \times 2 - 5 = -1$. Donc A'(4 ; -1). Les signes demandent de la vigilance : soustraire un nombre négatif revient à ajouter son opposé. Dans une construction avec un cercle, commence toujours par l'image du centre. L'image d'un cercle de centre C et de rayon 3 cm est le cercle de centre C', image de C, et de rayon 3 cm. Tu n'as pas à symétriser une multitude de points du cercle. Pour l'image d'une droite, choisis deux points distincts de cette droite, construis leurs images, puis trace la droite passant par ces deux images. Cette méthode est valable parce qu'une droite est déterminée par deux points distincts. Travaille avec des traits de construction légers : ils servent à contrôler ton raisonnement, puis tu mets en valeur la figure finale. C'est une finale de rigueur, pas un dessin décoratif.

Cas particulier à ne pas rater

Si le centre O appartient à une droite d, l'image de d est la droite d elle-même. Cela ne signifie pas que chaque point de d reste fixe : seul O reste fixe ; les autres points sont envoyés de l'autre côté de O.

Exemples résolus

Construire l'image d'un triangle

Énoncé. Construis l'image A'B'C' du triangle ABC par la symétrie centrale de centre O.

1. Trace les droites (AO), (BO) et (CO).
2. Sur (AO), place A' de l'autre côté de O avec $OA' = OA$. Fais de même pour B' et C'.
3. Vérifie que O est le milieu de [AA'], de [BB'] et de [CC'].
4. Relie A', B' et C' dans cet ordre pour obtenir le triangle image.

Résultat : Le triangle A'B'C' est l'image du triangle ABC. Les segments [AB] et [A'B'] ont la même longueur et sont parallèles, de même pour les autres côtés correspondants.

Trouver des coordonnées par symétrie centrale

Énoncé. Le point A a pour coordonnées (-3 ; 4) et son image A' par la symétrie centrale de centre O a pour coordonnées (5 ; -2). Détermine les coordonnées de O.

1. Le centre O est le milieu de [AA'].
2. Calcule son abscisse : $x_O = (-3 + 5) \div 2 = 2 \div 2 = 1$.
3. Calcule son ordonnée : $y_O = (4 + (-2)) \div 2 = 2 \div 2 = 1$.

Résultat : O a pour coordonnées (1 ; 1).

Justifier un parallélogramme

Énoncé. Dans le quadrilatère ABCD, O est le milieu de [AC] et de [BD]. Justifie que ABCD est un parallélogramme.

1. Les diagonales du quadrilatère ABCD sont [AC] et [BD].
2. Les données indiquent que ces deux diagonales ont le même milieu O.
3. Utilise la réciproque de la propriété des diagonales d'un parallélogramme.

Résultat : Les diagonales [AC] et [BD] se coupent en leur milieu O. Donc ABCD est un parallélogramme.

Les conseils de Coach Vince



Annonce la propriété

Avant une justification, écris que le centre d'une symétrie centrale est le milieu du segment joignant un point à son image. Ensuite seulement, vérifie les deux conditions nécessaires.



Fais le contrôle final

Après une construction, vérifie que le centre est entre chaque sommet et son image. Une distance juste du mauvais côté ne valide pas la figure.

Erreurs fréquentes

Erreur à éviter	Pourquoi	Le bon réflexe
Placer A' à la même distance que A , mais du même côté de O .	O n'est alors pas entre A et A' et ne peut pas être le milieu de $[AA']$.	Trace d'abord la droite (AO) , puis place l'image de l'autre côté du centre.
Affirmer que deux points sont symétriques parce que $OA = OA'$.	L'égalité des distances ne suffit pas : les trois points doivent aussi être alignés.	Contrôle toujours les deux critères : alignement et égalité des longueurs.
Dire que l'image de toute droite est une droite parallèle.	Une droite passant par le centre O est envoyée sur elle-même.	Regarde d'abord si O appartient ou non à la droite.
Relier les sommets images dans un ordre différent.	Tu peux alors dessiner un polygone qui se croise et qui n'est pas l'image demandée.	Conserve l'ordre des sommets : A, B, C devient A', B', C' .

TA SÉANCE D'ENTRAÎNEMENT

1 Identifier le centre ★★★

Indique si O peut être le centre de symétrie demandé.

1. A , O et A' sont alignés et $OA = OA'$.
2. $OA = OA'$, mais A , O et A' ne sont pas alignés.

2 Choisir le bon mot ★★★

Complète chaque phrase avec « milieu », « image » ou « centre ».

1. Dans une symétrie centrale de centre O , le point A' est l'... de A .
2. Le point O est le ... du segment $[AA']$.
3. Le point qui commande la transformation est le ... de symétrie.

3 Calculer une image ★★★

Calcule les coordonnées de l'image demandée.

1. $A(2 ; -1)$ a pour image A' par la symétrie de centre $O(0 ; 0)$.
2. $B(-4 ; 3)$ a pour image B' par la symétrie de centre $O(1 ; 2)$.

4 Analyser les droites ★★★

Associe chaque situation à son image.

1. La droite d passe par le centre O .
2. La droite e ne passe pas par le centre O .

5 Démontrer un parallélogramme ★★★

Justifie que le quadrilatère $EFGH$ est un parallélogramme sachant que O est le milieu de $[EG]$ et de $[FH]$.

Rédige une démonstration complète.

6 Transformer un cercle ★★★

Détermine les caractéristiques du cercle image.

1. Le cercle c a pour centre C et pour rayon 4 cm. C' est l'image de C par la symétrie centrale de centre O .

7 Trouver le centre ★★★

Calcule les coordonnées du centre de symétrie puis vérifie ton résultat.

1. $P(-5 ; 6)$ et $P'(3 ; -4)$ sont symétriques par rapport à O .

8 Rédiger une preuve d'image ★★★

Justifie que M' est l'image de M par la symétrie centrale de centre O .

Les points M , O et M' sont alignés. On sait que $OM = 3,7$ cm et $OM' = 3,7$ cm.

ÉVALUATION

Réponds avec soin. Pour toute justification, rédige une phrase complète utilisant la propriété adaptée.

Barème : 20 points

1. Énonce la condition nécessaire et suffisante pour que A' soit l'image de A par la symétrie centrale de centre O . / 3
2. $A(-2 ; 4)$ a pour image A' par la symétrie de centre $O(3 ; -1)$. Calcule les coordonnées de A' . / 4
3. $B(1 ; -3)$ et $B'(9 ; 5)$ sont symétriques par rapport à O . Calcule les coordonnées de O . / 4
4. La droite d passe par O . Indique l'image de d par la symétrie centrale de centre O et justifie. / 3
5. Dans le quadrilatère $ABCD$, O est le milieu de $[AC]$ et de $[BD]$. Justifie que $ABCD$ est un parallélogramme. / 4
6. Le cercle c a pour centre R et pour rayon 2,5 cm. R' est l'image de R par la symétrie centrale de centre O . Donne le cercle image. / 2

Quiz de révision

1. Dans une symétrie centrale de centre O , quelle affirmation est toujours vraie ?

- A) O est le milieu de $[AA']$. B) A et A' sont sur une droite perpendiculaire à (AO) .
C) OA est deux fois plus grande que OA' . D) A reste fixe.

2. Quelle transformation correspond à une symétrie centrale ?

- A) Un quart de tour autour de O B) Un demi-tour autour de O C) Un déplacement sans rotation
D) Un agrandissement de centre O

3. Si $A(2 ; 1)$ a pour image A' par la symétrie de centre $O(0 ; 0)$, quelles sont les coordonnées de A' ?

- A) $(2 ; -1)$ B) $(-2 ; 1)$ C) $(-2 ; -1)$ D) $(0 ; 0)$

4. L'image d'une droite qui ne passe pas par le centre O est :

- A) une droite perpendiculaire B) une droite parallèle C) un segment de même longueur
D) la même droite dans tous les cas

5. Quelle donnée ne suffit pas à prouver que A' est l'image de A par rapport à O ?

- A) A , O et A' sont alignés et $OA = OA'$ B) O est le milieu de $[AA']$ C) $OA = OA'$
D) A et A' sont de part et d'autre de O sur la même droite

6. L'image d'un cercle de centre C et de rayon 6 cm est :

- A) un cercle de même centre et de rayon 12 cm B) un cercle de centre C' et de rayon 6 cm
C) un segment de longueur 6 cm D) un cercle de centre O et de rayon 6 cm

7. Si O est le milieu des diagonales $[AC]$ et $[BD]$ d'un quadrilatère $ABCD$, alors $ABCD$ est :

- A) un triangle rectangle B) un parallélogramme C) un cercle D) un losange obligatoirement

8. Quel point reste toujours fixe dans une symétrie centrale de centre O ?

- A) A B) A' C) O D) Le milieu de n'importe quel segment

9. $P(-4 ; 2)$ a pour image $P'(6 ; 8)$. Quel est le centre O ?

- A) $(1 ; 5)$ B) $(2 ; 3)$ C) $(10 ; 10)$ D) $(-1 ; -3)$

Guide pour les parents

Laisse ton enfant manipuler la règle et le compas : il doit construire et contrôler par lui-même.

- Demande-lui d'expliquer à voix haute pourquoi le centre doit être le milieu de chaque segment reliant un point à son image.
- Sur un quadrillage, propose un point et un centre, puis demande les coordonnées de l'image avant de vérifier ensemble le calcul du milieu.

Questions fréquentes

Q. Comment savoir si deux points sont symétriques par rapport à O ?

R. Vérifie que les deux points et O sont alignés, puis que les distances au centre sont égales. Cela revient à vérifier que O est le milieu du segment qui les relie.

Q. Le centre de symétrie bouge-t-il ?

R. Non. Le centre O est invariant : son image est lui-même.

Q. Une symétrie centrale conserve-t-elle les longueurs ?

R. Oui. Elle conserve notamment les longueurs, les angles, l'alignement, le parallélisme, les aires et la nature des figures.

Q. Au brevet, faut-il faire une phrase de justification ?

R. Oui, dès qu'une question demande de justifier. Cite la propriété utile, indique les informations de la figure ou de l'énoncé, puis conclus clairement.

CORRIGÉ

Exercice 1 : Identifier le centre

1. Vrai : O est le milieu de $[AA']$, donc A' est l'image de A. Les deux conditions de la définition sont vérifiées.
2. Faux : O ne peut pas être le milieu de $[AA']$. L'alignement est indispensable.

Exercice 2 : Choisir le bon mot

1. image. A' est le résultat de la transformation appliquée à A.
2. milieu. C'est la définition de la symétrie centrale.
3. centre. Il reste fixe lors de la transformation.

Exercice 3 : Calculer une image

1. $A'(-2 ; 1)$. $xA' = 2 \times 0 - 2 = -2$ et $yA' = 2 \times 0 - (-1) = 1$.
2. $B'(6 ; 1)$. $xB' = 2 \times 1 - (-4) = 6$ et $yB' = 2 \times 2 - 3 = 1$.

Exercice 4 : Analyser les droites

1. L'image de d est la droite d elle-même. Un demi-tour autour d'un point de la droite conserve cette droite.
2. L'image de e est une droite parallèle à e. La symétrie centrale conserve la direction d'une droite.

Exercice 5 : Démontrer un parallélogramme

1. Les diagonales du quadrilatère EFGH sont $[EG]$ et $[FH]$. Or O est le milieu de $[EG]$ et de $[FH]$. Les diagonales se coupent donc en leur milieu. Par conséquent, EFGH est un parallélogramme. La réciproque de la propriété des diagonales permet la conclusion.

Exercice 6 : Transformer un cercle

1. L'image de c est le cercle de centre C' et de rayon 4 cm. La symétrie centrale conserve les longueurs, donc le rayon.

Exercice 7 : Trouver le centre

1. $xO = (-5 + 3) \div 2 = -1$ et $yO = (6 + (-4)) \div 2 = 1$. Donc O(-1 ; 1). Vérification : de P à O, on ajoute 4 à l'abscisse et on retire 5 à l'ordonnée ; de O à P', on effectue le même déplacement. Le centre est le milieu de $[PP']$.

Exercice 8 : Rédiger une preuve d'image

1. Les points M, O et M' sont alignés et $OM = OM'$. Donc O est le milieu du segment $[MM']$. Par conséquent, M' est l'image de M par la symétrie centrale de centre O. La conclusion découle directement de la définition.

Corrigé de l'évaluation

1. A' est l'image de A par la symétrie centrale de centre O si, et seulement si, O est le milieu du segment $[AA']$. / 3
2. $xA' = 2 \times 3 - (-2) = 8$ et $yA' = 2 \times (-1) - 4 = -6$. Donc A'(8 ; -6). / 4
3. $xO = (1 + 9) \div 2 = 5$ et $yO = (-3 + 5) \div 2 = 1$. Donc O(5 ; 1). / 4
4. L'image de la droite d est la droite d elle-même, car une droite passant par le centre de symétrie est conservée par cette transformation. / 3
5. Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ du quadrilatère ABCD se coupent en leur milieu O. Donc ABCD est un parallélogramme. / 4
6. Le cercle image a pour centre R' et pour rayon 2,5 cm. / 2

Réponses du quiz

1. **A) O est le milieu de $[AA']$.** Le centre O est le milieu du segment reliant un point à son image.
2. **B) Un demi-tour autour de O.** La symétrie centrale équivaut à une rotation de 180° .
3. **C) (-2 ; -1).** Par rapport à l'origine, les deux coordonnées changent de signe.
4. **B) une droite parallèle.** Une droite ne passant pas par le centre a pour image une droite parallèle.
5. **C) $OA = OA'$.** L'égalité des distances seule ne garantit pas l'alignement.
6. **B) un cercle de centre C' et de rayon 6 cm.** Le centre est transformé et le rayon est conservé.
7. **B) un parallélogramme.** Un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu est un parallélogramme.
8. **C) O.** Le centre de la symétrie est son propre image.
9. **A) (1 ; 5).** O est le milieu : $xO = (-4 + 6) \div 2 = 1$ et $yO = (2 + 8) \div 2 = 5$.

Pour aller plus loin sur exercices-3eme.fr

- › **Toutes les fiches de Mathématiques en 3^e** · [/mathematiques-3eme/](https://exercices-3eme.fr/mathematiques-3eme/)
- › **Le domaine « geometrie » en 3^e** · [/mathematiques-3eme/geometrie/](https://exercices-3eme.fr/mathematiques-3eme/geometrie/)
- › **Préparer le brevet (dates, épreuves, méthode)** · [/brevet/](https://exercices-3eme.fr/brevet/)