Le nombre d'or en 3e : comprendre ses liens avec la géométrie et la nature

3e | Difficulté ★★☆ | ⏱ 50 min | Objectif : reconnaître le nombre d'or | Tombe souvent au brevet | Éco-encre (N&B)

Prénom : ..... **Date :** .....

Compétence visée (programme cycle 4) : Pythagore, Thalès, trigonométrie, transformations, géométrie dans l'espace (solides, sections, agrandissement-réduction).

Coach Vince te résume l'essentiel

- Le nombre d'or, noté φ, vaut environ 1,618 et vérifie l'égalité $\varphi^2 = \varphi + 1$.
- Un rectangle est dit d'or lorsque le quotient de sa longueur par sa largeur est égal, ou très proche, de φ.
- Dans la nature, certaines organisations présentent des rapports ou des spirales proches de ce modèle, sans que ce soit une règle universelle.

AU BREVET, ON TE DEMANDE...

Tu peux devoir calculer un rapport de longueurs, exploiter une construction avec $\sqrt{5}$ ou interpréter des mesures dans un contexte géométrique. Les exercices peuvent aussi mobiliser Thalès, la trigonométrie, une transformation ou une section de solide.

Type de question	Calcul à justifier, analyse de mesures, question de géométrie avec Pythagore, Thalès, trigonométrie, transformation, agrandissement-réduction ou section de solide.
Exemple type	Un rectangle mesure 34 cm sur 21 cm. Calcule le quotient de sa longueur par sa largeur, puis indique si ce rectangle est proche d'un rectangle d'or.
Alerte piège	Inverser le quotient, oublier de convertir les unités, appliquer une propriété sans vérifier ses conditions ou conclure à une égalité exacte à partir de mesures arrondies.

LA LEÇON

Le nombre d'or : une proportion précise

Le nombre d'or est un nombre irrationnel, noté φ, qui apparaît lorsqu'un segment est partagé selon une proportion particulière. Imagine un grand segment découpé en une grande partie et une petite partie. La division est d'or lorsque le quotient du segment entier par la grande partie est égal au quotient de la grande partie par la petite partie. Les deux quotients ont alors la même valeur : φ. Cette condition s'écrit : entier ÷ grande partie = grande partie ÷ petite partie.La valeur exacte de φ est $(1 + \sqrt{5}) \div 2$. Sa valeur approchée est $\varphi \approx 1{,}618$. Comme $\sqrt{5}$ est irrationnel, φ possède une infinité de décimales non périodiques. Dans un calcul concret, tu dois annoncer si tu donnes une valeur exacte, avec $\sqrt{5}$, ou une valeur approchée, avec le symbole ≈.Le nombre φ vérifie une propriété fondamentale : $\varphi^2 = \varphi + 1$. Cette égalité permet de reconnaître le nombre d'or dans des calculs algébriques ou géométriques. Si un nombre positif x vérifie $x^2 = x + 1$, alors x est égal à φ. En effet, l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ possède deux solutions, mais une seule est positive : φ. Le nombre négatif associé ne peut pas représenter le quotient de deux longueurs positives.Ne confonds pas « proche de φ » et « égal à φ ». Un rapport de longueurs peut être 1,62 : il est proche de 1,618, mais il ne constitue qu'une approximation. En géométrie, une

construction à la règle et au compas peut produire une longueur exactement liée à $\sqrt{5}$; une mesure faite à la règle donne seulement une estimation. La démarche à suivre est simple : tu identifies les longueurs comparées, tu calcules le quotient dans le bon ordre, puis tu interprètes avec précision.

Le rectangle d'or

Un rectangle d'or est un rectangle dont le quotient de la plus grande longueur par la plus petite longueur vaut φ. Si sa largeur vaut l, sa longueur vaut $\varphi \times l$. Le quotient doit toujours être supérieur ou égal à 1 : place donc la plus grande dimension au numérateur.Ce rectangle possède une propriété remarquable. Si tu retires un carré ayant pour côté la largeur du rectangle, le petit rectangle restant est semblable au rectangle de départ. Cela signifie que les angles correspondants sont égaux et que les longueurs correspondantes sont proportionnelles. Cette propriété découle de $\varphi^2 = \varphi + 1$.Exemple : un rectangle de largeur 5 et de longueur 5φ est exactement un rectangle d'or. Sa longueur vaut environ 8,09. Un rectangle de largeur 8 et de longueur 13 n'est pas exactement d'or, car $13 \div 8 = 1{,}625$, mais ce rapport est proche de φ. Dans un énoncé, observe le vocabulaire : « est un rectangle d'or » demande une égalité exacte ou une construction rigoureuse ; « se rapproche d'un rectangle d'or » autorise une comparaison approchée.

Construire une longueur d'or avec Pythagore

- Trace un carré ABCD de côté 1. Place M, milieu du segment [AB]. Tu as donc AM = MB = ½.
- Dans le triangle MBC rectangle en B, l'hypoténuse est [MC], car elle est opposée à l'angle droit situé en B. Le théorème de Pythagore s'applique uniquement parce que le triangle est rectangle : $MC^2 = MB^2 + BC^2$.
- Calcule : $MC^2 = ½^2 + 1^2 = ¼ + 1 = 5 \div 4$. Comme MC est une longueur positive, $MC = \sqrt{5} \div 2$.
- Trace le cercle de centre M et de rayon MC. Il coupe la droite (AB), prolongée au-delà de B, en un point N. Alors $MN = MC = \sqrt{5} \div 2$.
- Additionne AM et MN : $AN = ½ + \sqrt{5} \div 2 = (1 + \sqrt{5}) \div 2 = \varphi$. Le segment [AN] a donc pour longueur φ lorsque le côté du carré mesure 1.
- Si le carré a pour côté c, toutes les longueurs sont multipliées par c. La construction donne alors une longueur $c \times \varphi$. Un agrandissement ou une réduction conserve les rapports de longueurs : un rectangle d'or reste un rectangle d'or.

Thalès, trigonométrie et transformations : exploiter une figure

Le nombre d'or peut être étudié dans des figures où interviennent plusieurs outils du programme de 3e. Lorsque des droites sont parallèles, le théorème de Thalès permet de calculer une longueur manquante et donc de former un rapport. Par exemple, dans un triangle ABC, si M appartient à [AB], N appartient à [AC] et si (MN) est parallèle à (BC), alors $AM \div AB = AN \div AC = MN \div BC$. Il faut toujours citer les alignements et le parallélisme avant d'appliquer Thalès. Une fois une longueur calculée, tu peux comparer un quotient à φ ; Thalès ne prouve pas à lui seul qu'une figure est d'or.Dans un triangle rectangle issu d'un rectangle d'or, la trigonométrie peut également être utile. Si la longueur vaut L, la largeur l et que la diagonale forme un angle α avec la longueur, alors $\tan \alpha = l \div L$. Pour un rectangle d'or, $L \div l = \varphi$, donc $l \div L$ est environ égal à 0,618. Avec une calculatrice, tu peux déterminer l'angle α à partir de $\tan \alpha$, ou calculer une longueur lorsque l'angle et une autre longueur sont connus. Choisis sin, cos ou tan en repérant les côtés opposé, adjacent et l'hypoténuse dans le triangle rectangle.Une translation, une rotation, une symétrie axiale ou une symétrie centrale conserve les longueurs et les angles : l'image d'un rectangle d'or par l'une de ces transformations est donc encore un rectangle d'or. Une homothétie, un agrandissement ou une réduction multiplie toutes les longueurs par le même coefficient. Le rapport longueur ÷ largeur est alors conservé. Attention : une transformation géométrique ne change pas la nature d'un rectangle d'or, mais une déformation qui ne conserverait pas les proportions pourrait modifier son rapport.

Suite de Fibonacci et observations dans la nature

Objet étudié	Calcul ou observation	Interprétation rigoureuse

Suite de Fibonacci	Chaque terme est la somme des deux précédents : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21…	Les quotients de deux termes consécutifs se rapprochent de φ : 13 ÷ 8 = 1,625 et 21 ÷ 13 ≈ 1,615.
Organisation de certaines feuilles	Les positions successives peuvent former des spirales visibles autour d'une tige.	Certaines plantes présentent des nombres de spirales liés à des termes de Fibonacci. Ce n'est ni systématique ni une preuve que toute plante « suit » φ.
Capitules et pommes de pin	Des spirales dans deux sens peuvent être comptées sur certaines structures.	Les nombres observés sont parfois des nombres de Fibonacci. Il faut vérifier l'objet étudié au lieu d'affirmer une règle générale.
Angle d'or	Un tour complet mesure 360°. L'angle associé à φ vaut environ 137,5°.	Cet angle peut favoriser une répartition des éléments autour d'un axe, mais il décrit un modèle mathématique, pas une loi valable pour toute la nature.

Solides, sections et agrandissement-réduction

Le vocabulaire du nombre d'or peut aussi être utilisé dans la géométrie dans l'espace. Considère par exemple un prisme droit dont la base est un rectangle d'or. Si un plan coupe ce prisme parallèlement aux bases, la section obtenue est un rectangle superposable à la base : ses dimensions et son rapport sont donc conservés. Dans un prisme droit, une section parallèle à une base a la même forme et les mêmes dimensions que cette base. Tu dois distinguer la figure plane obtenue par la section du solide entier.Dans une pyramide ou dans un cône, une section parallèle à la base produit une figure semblable à la base, mais généralement plus petite. Les longueurs de la section sont obtenues par un coefficient de réduction compris entre 0 et 1. Les aires sont alors multipliées par le carré de ce coefficient et les volumes par son cube. Au niveau 3e, lis attentivement les données : si un coefficient k est donné pour les longueurs, tu multiplies chaque longueur correspondante par k. Le quotient de deux longueurs correspondantes est inchangé.Pour représenter un solide, vérifie quelles arêtes sont visibles, lesquelles sont cachées et quelle est la position du plan de coupe. Une section parallèle à une face ne se déduit pas d'une simple impression visuelle : tu dois t'appuyer sur le parallélisme des plans ou des arêtes indiqué dans l'énoncé. Dans une situation d'agrandissement-réduction, conserve les unités et applique le même coefficient à toutes les longueurs concernées. Ces méthodes sont fréquentes dans les exercices de brevet, même lorsque le contexte évoque l'architecture, un objet ou une forme naturelle.

Observer, calculer, conclure : la méthode solide

Face à une photographie de fleur, de coquillage ou d'architecture, garde une attitude scientifique. Une image peut suggérer une spirale ou une proportion harmonieuse, mais elle ne démontre rien à elle seule. Pour établir qu'un rapport est proche du nombre d'or, tu dois disposer de mesures identifiées, calculer le quotient demandé et le comparer à 1,618. Si les dimensions sont arrondies, ta conclusion doit elle aussi être prudente : « le rapport est proche de φ » est acceptable ; « le rectangle est exactement d'or » ne l'est pas sans donnée exacte.Quand tu compares deux longueurs, écris l'unité et vérifie qu'elle est identique pour les deux mesures. Le quotient de 32 cm par 20 cm vaut 1,6. Ce résultat est proche de φ, mais l'écart existe. Si tu avais 32 mm et 2 cm, tu convertirais d'abord 2 cm en 20 mm avant de calculer 32 ÷ 20. Un quotient de longueurs est sans unité lorsque les deux longueurs sont exprimées dans la même unité.Le nombre d'or peut aussi apparaître dans un exercice de géométrie utilisant des racines carrées, une construction ou un agrandissement. Lis la figure avant de te lancer. Repère les segments égaux, les milieux, les triangles rectangles et les droites prolongées. Si tu utilises Pythagore, annonce d'abord que le triangle est rectangle et nomme l'hypoténuse correctement. Si tu utilises Thalès, vérifie les alignements et le parallélisme. Si tu utilises une homothétie ou un coefficient d'agrandissement, applique-le à toutes les longueurs correspondantes. Ensuite seulement, forme le quotient

longueur ÷ largeur.Dernière vérification : dans un rectangle d'or, la longueur est plus grande que la largeur, donc le rapport longueur ÷ largeur doit être supérieur à 1. Un résultat comme 0,618 peut être utile, mais il correspond au quotient largeur ÷ longueur. Il n'est pas faux ; il ne répond simplement pas au quotient attendu. Conseil de Coach Vince : une conclusion courte, justifiée et bien formulée vaut mieux qu'une affirmation spectaculaire.

Exemples résolus

Vérifier si un rectangle est proche d'un rectangle d'or

Énoncé. Un rectangle mesure 21 cm de longueur et 13 cm de largeur. Détermine si ses dimensions sont proches de celles d'un rectangle d'or.

1. La longueur est 21 cm et la largeur est 13 cm ; le quotient à calculer est donc 21 ÷ 13.
2. On obtient 21 ÷ 13 ≈ 1,615.
3. Or $\varphi \approx 1{,}618$. Les deux valeurs sont très proches.
4. Les mesures étant entières et le quotient étant approché, on ne peut pas affirmer que le rectangle est exactement d'or.

Résultat : Le rectangle est proche d'un rectangle d'or, car 21 ÷ 13 ≈ 1,615 est proche de 1,618.

Construire une longueur liée au nombre d'or

Énoncé. ABCD est un carré de côté 6 cm. M est le milieu de [AB]. Dans le triangle MBC, calcule MC puis la longueur AN obtenue en prolongeant [AB] au-delà de B et en plaçant N tel que MN = MC.

1. M est le milieu de [AB], donc MB = 3 cm. De plus, BC = 6 cm.
2. Le triangle MBC est rectangle en B. Son hypoténuse est [MC], opposée au sommet B.
3. D'après le théorème de Pythagore, $MC^2 = MB^2 + BC^2 = 3^2 + 6^2 = 9 + 36 = 45$.
4. $MC = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ cm, car MC est une longueur positive.
5. A, M et N sont alignés, avec AM = 3 cm et $MN = 3\sqrt{5}$ cm. Donc $AN = 3 + 3\sqrt{5} = 3(1 + \sqrt{5})$ cm.
6. Comme $\varphi = (1 + \sqrt{5}) \div 2$, on obtient $AN = 6\varphi$ cm.

Résultat : $MC = 3\sqrt{5}$ cm et $AN = 6\varphi$ cm, soit environ 9,71 cm.

TA SÉANCE D'ENTRAÎNEMENT

1 Valeur repère ★☆☆

Choisis la valeur approchée de φ.

1. φ est environ égal à : 0,618 ; 1,618 ; 2,618 ; 3,618.

2 Le bon ordre ★☆☆

Calcule le quotient longueur ÷ largeur.

1. Un rectangle mesure 13 cm de longueur et 8 cm de largeur. .....

3 Série de Fibonacci ★☆☆

Complète chaque suite en ajoutant les deux termes précédents.

1. 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; … ; … .....

2. 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; … ; … .....

4 Identité à connaître ★★☆

Complète les égalités.

1. $\varphi^2 = \varphi + \ldots$ .....

2. La valeur exacte de φ est $(1 + \sqrt{5}) \div \ldots$ .....

5 Construction sur un carré ★★☆

Calcule la longueur demandée en justifiant l'usage de Pythagore.

ABCD est un carré de côté 4 cm. M est le milieu de [AB]. Calcule MC.

6 Observer sans affirmer trop vite ★★☆

Indique si chaque affirmation est vraie ou fausse.

1. Toute plante possède exactement des proportions liées au nombre d'or. .....

2. Un rapport mesuré égal à 1,62 est proche de φ. .....

7 Conclusion justifiée ★★★

Analyse les dimensions et rédige une conclusion précise.

Un rectangle mesure 13 cm sur 8 cm. Est-il exactement un rectangle d'or ? Est-il proche d'un rectangle d'or ?

8 Agrandissement et proportion ★★★

Applique la réduction puis vérifie le rapport des dimensions.

1. Un rectangle mesure 65 cm de longueur et 40 cm de largeur. Réduis-le avec le coefficient 3 ÷ 5, puis calcule le nouveau rapport longueur ÷ largeur. .....
2. Le rectangle réduit est-il proche d'un rectangle d'or ? .....

ÉVALUATION

Rédige les calculs utiles, justifie toute utilisation du théorème de Pythagore et formule des conclusions précises.

Barème : 20 points

1. Donne la valeur exacte et une valeur approchée de φ. / 3

2. Calcule le quotient longueur ÷ largeur d'un rectangle de dimensions 34 cm et 21 cm. / 3

3. Indique si le rectangle de dimensions 34 cm et 21 cm est proche d'un rectangle d'or. / 3

4. ABCD est un carré de côté 10 cm. M est le milieu de [AB]. Calcule MC. / 4

5. Complète : $\varphi^2 = \varphi + \ldots$ / 3

6. Explique en une ou deux phrases pourquoi une photographie de spirale ne suffit pas à prouver la présence du nombre d'or. / 4

Les conseils de Coach Vince

Annonce la règle
Avant tout calcul de Pythagore, écris que le triangle est rectangle et nomme son hypoténuse. Ta rédaction montre que tu choisis la bonne méthode, pas seulement une formule.

Conclue à la bonne précision

Un quotient décimal permet de dire « proche de φ », pas « égal à φ ». Vérifie aussi que ton rapport longueur ÷ largeur est supérieur à 1.

Pour aller plus loin sur exercices-3eme.fr

- **Toutes les fiches de Mathématiques en 3e** · /mathematiques-3eme/
- **Le domaine « geometrie » en 3e** · /mathematiques-3eme/geometrie/
- **Préparer le brevet (dates, épreuves, méthode)** · /brevet/