

Le pgcd en 3^e : cours, exercices et méthode pour le brevet

3^e

Difficulté ★★★

 45 min

Objectif : le PGCD

Tombe souvent au brevet

Éco-encre (N&B)

Prénom :

Date :

Compétence visée (programme cycle 4) : Déterminer le plus grand diviseur commun à deux entiers et l'utiliser pour rendre une fraction irréductible ou résoudre un problème de partage.

Coach Vince te résume l'essentiel

- ▶ Le PGCD de deux entiers est leur plus grand diviseur commun.
- ▶ Les divisions euclidiennes successives donnent le PGCD de façon sûre et rapide.
- ▶ Un PGCD sert à simplifier une fraction au maximum ou à organiser un partage en parts égales.

AU BREVET, ON TE DEMANDE...

Tu dois souvent calculer un PGCD en justifiant les divisions successives, puis exploiter ce résultat pour réduire une fraction ou organiser un partage maximal sans reste.

Type de question Calcul à justifier, problème de partage rédigé et QCM d'automatismes sur les nombres premiers entre eux ou les fractions irréductibles.

Exemple type Une association possède 132 affiches et 84 livrets. Elle veut constituer le plus grand nombre de pochettes identiques sans reste. Détermine ce nombre puis le contenu d'une pochette.

Alerte piège S'arrêter à un diviseur commun qui n'est pas le plus grand, ou oublier de préciser ce que représente le PGCD dans la phrase de conclusion.

LA LEÇON

Le sens exact du PGCD

PGCD signifie plus grand commun diviseur. Pour deux entiers naturels non nuls, le PGCD est le plus grand entier qui divise les deux nombres sans reste. On écrit $\text{PGCD}(a ; b)$. Par exemple, les diviseurs de 18 sont 1, 2, 3, 6, 9 et 18. Les diviseurs de 30 sont 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 et 30. Les diviseurs communs à 18 et 30 sont donc 1, 2, 3 et 6. Le plus grand est 6 : $\text{PGCD}(18 ; 30) = 6$. Attention au mot commun : un diviseur doit diviser les deux nombres, pas un seul. Attention aussi au mot plus grand : 2 est bien un diviseur commun de 18 et 30, mais ce n'est pas leur PGCD. Le PGCD est toujours positif. Il ne peut pas être plus grand que le plus petit des deux nombres. Si l'un des nombres divise l'autre, le PGCD est le plus petit nombre. Ainsi, comme 12 divise 48, $\text{PGCD}(12 ; 48) = 12$. Pour un entier positif a , $\text{PGCD}(a ; 1) = 1$ et $\text{PGCD}(a ; 0) = a$. Le cas $\text{PGCD}(0 ; 0)$ n'est pas utilisé ici. Quand $\text{PGCD}(a ; b) = 1$, les entiers a et b sont dits premiers entre eux. Cela ne signifie pas qu'ils sont eux-mêmes des nombres premiers. Par exemple, 8 et 15 sont premiers entre eux : aucun entier supérieur à 1 ne les divise tous les deux.

Choisir la bonne procédure

Situation	Méthode efficace	Exemple de conclusion
-----------	------------------	-----------------------

Les nombres sont petits et leurs diviseurs sont faciles à lister.	Liste les diviseurs de chaque nombre, puis garde les diviseurs communs.	Les diviseurs communs de 12 et 20 sont 1, 2 et 4 : $\text{PGCD}(12 ; 20) = 4$.
Les nombres sont plus grands ou une justification est demandée.	Utilise les divisions euclidiennes successives jusqu'à obtenir un reste nul.	Le dernier reste non nul est le PGCD.
Tu dois simplifier une fraction.	Calcule le PGCD du numérateur et du dénominateur, puis divise les deux par ce PGCD.	$\text{PGCD}(45 ; 60) = 15$, donc $45/60 = 3/4$.
Tu dois faire le plus grand nombre possible de paquets identiques.	Calcule le PGCD des deux quantités : il donne le nombre maximal de paquets.	Avec 24 objets d'une sorte et 36 d'une autre, on peut faire 12 paquets.

La méthode des divisions successives

- Range les deux entiers dans l'ordre décroissant. Divise le plus grand par le plus petit selon une division euclidienne. Écris l'égalité sous la forme $\text{dividende} = \text{diviseur} \times \text{quotient} + \text{reste}$.
- Si le reste est nul, arrête immédiatement : le diviseur de cette dernière division est le PGCD. Ne poursuis jamais avec une division par 0.
- Si le reste n'est pas nul, recommence en divisant l'ancien diviseur par l'ancien reste. Le nouveau reste est obligatoirement plus petit que le diviseur : la suite finit donc par atteindre 0.
- Exemple : cherche $\text{PGCD}(252 ; 198)$. D'abord, $252 = 198 \times 1 + 54$. Ensuite, $198 = 54 \times 3 + 36$. Puis, $54 = 36 \times 1 + 18$. Enfin, $36 = 18 \times 2 + 0$. Le dernier reste non nul est 18, donc $\text{PGCD}(252 ; 198) = 18$.
- Tu peux rédiger une réponse propre en alignant les égalités. Chaque ligne doit être exacte : vérifie que $\text{diviseur} \times \text{quotient} + \text{reste}$ redonne bien le dividende. Dans l'exemple, $54 \times 3 + 36 = 198$; le calcul est cohérent.
- Cette méthode est valable pour déterminer le PGCD de deux entiers naturels. Elle est préférable à la liste des diviseurs dès que les nombres deviennent peu maniables ou que tu dois justifier ton résultat.

Rendre une fraction irréductible

Une fraction est irréductible lorsque son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux. Pour rendre une fraction irréductible, tu dois d'abord calculer le PGCD de son numérateur et de son dénominateur, à condition que le dénominateur ne soit pas nul. Divise ensuite le numérateur et le dénominateur par ce PGCD. Exemple : $252/198$. Les divisions successives donnent $\text{PGCD}(252 ; 198) = 18$. Donc $252/198 = 14/11$, car $252 \div 18 = 14$ et $198 \div 18 = 11$. La fraction $14/11$ est irréductible puisque $\text{PGCD}(14 ; 11) = 1$. Diviser seulement le numérateur ou seulement le dénominateur changerait la valeur de la fraction : c'est interdit. Ne choisis pas non plus un diviseur commun au hasard si l'énoncé demande une fraction irréductible. Avec $45/60$, diviser par 3 donne $15/20$, qui est encore réductible. Le PGCD vaut 15, donc la forme irréductible est $3/4$. Ton objectif est d'atteindre directement la forme finale, sans réduction incomplète.

Comprendre les problèmes de partage

Dans un problème de partage, le PGCD intervient lorsque tu dois fabriquer le plus grand nombre possible de groupes identiques, sans reste et en utilisant tous les objets. Les groupes doivent contenir la même quantité de chaque catégorie. Si tu as 84 jetons rouges et 126 jetons bleus, le nombre de groupes doit diviser 84 et 126. Il doit donc être un diviseur commun. Pour obtenir le plus grand nombre de groupes, tu cherches $\text{PGCD}(84 ; 126)$. Or $126 = 84 \times 1 + 42$, puis $84 = 42 \times 2 + 0$. Ainsi, $\text{PGCD}(84 ; 126) = 42$. Tu peux former 42 groupes. Chaque groupe contient $84 \div 42 = 2$ jetons rouges et $126 \div 42 = 3$ jetons bleus. La réponse complète comporte toujours trois informations : le calcul du PGCD, le nombre de groupes et le contenu d'un groupe. Ne confonds pas le nombre de groupes avec le nombre total d'objets dans un groupe. Ici, 42 est le nombre de groupes ; chaque groupe contient 5 jetons au total. Lis précisément la question : si l'on demande le nombre maximal de groupes, la réponse est 42. Si l'on demande la

composition d'un groupe, la réponse est 2 rouges et 3 bleus. Ton plan de jeu est simple : repère ce qui doit être identique, cherche le plus grand nombre qui divise toutes les quantités, puis effectue les divisions finales.

Exemples résolus

Calculer un PGCD par divisions successives

Énoncé. Détermine $\text{PGCD}(391 ; 299)$.

1. Je commence par diviser le plus grand entier par le plus petit : $391 = 299 \times 1 + 92$.
2. Je poursuis avec 299 et 92 : $299 = 92 \times 3 + 23$.
3. Je poursuis avec 92 et 23 : $92 = 23 \times 4 + 0$.
4. Le dernier reste non nul est 23.

Résultat : $\text{PGCD}(391 ; 299) = 23$.

Réduire une fraction jusqu'à sa forme irréductible

Énoncé. Rends la fraction $156/234$ irréductible.

1. Je calcule le PGCD de 234 et 156 : $234 = 156 \times 1 + 78$.
2. Je poursuis : $156 = 78 \times 2 + 0$. Donc $\text{PGCD}(156 ; 234) = 78$.
3. Je divise le numérateur et le dénominateur par 78 : $156 \div 78 = 2$ et $234 \div 78 = 3$.
4. Les entiers 2 et 3 sont premiers entre eux, donc la fraction obtenue est irréductible.

Résultat : $156/234 = 2/3$.

Organiser un partage maximal

Énoncé. Un club dispose de 96 gourdes et de 144 barres de céréales. Il veut préparer le plus grand nombre de lots identiques en utilisant tous les objets. Détermine le nombre de lots et leur composition.

1. Le nombre de lots doit diviser 96 et 144. Je calcule donc $\text{PGCD}(144 ; 96)$.
2. $144 = 96 \times 1 + 48$, puis $96 = 48 \times 2 + 0$. Ainsi, $\text{PGCD}(96 ; 144) = 48$.
3. Le nombre maximal de lots est donc 48.
4. Chaque lot contient $96 \div 48 = 2$ gourdes et $144 \div 48 = 3$ barres de céréales.

Résultat : On peut préparer 48 lots identiques contenant chacun 2 gourdes et 3 barres de céréales.

TA SÉANCE D'ENTRAÎNEMENT

1 Repérer un PGCD ★★★

Détermine le PGCD de chaque paire en listant les diviseurs communs.

1. PGCD(16 ; 24)
2. PGCD(21 ; 28)

2 Identifier des nombres premiers entre eux ★★★

Indique si chaque paire est composée de nombres premiers entre eux.

1. 14 et 25 sont premiers entre eux.
2. 27 et 45 sont premiers entre eux.
3. 1 et 37 sont premiers entre eux.

3 Lancer la série de divisions ★★★

Calcule chaque PGCD par la méthode des divisions successives.

1. PGCD(143 ; 91)
2. PGCD(198 ; 126)

4 Réduire sans étape inutile ★★★

Rends chaque fraction irréductible en utilisant le PGCD.

1. $\frac{72}{108}$
2. $\frac{91}{143}$

5 Compléter un raisonnement ★★★

Complète les éléments manquants puis conclus.

1. $280 = 168 \times 1 + \dots$; $168 = \dots \times 1 + 56$; $112 = 56 \times \dots + 0$

6 Préparer des lots identiques ★★★

Résous le problème en rédigeant une conclusion complète.

Une médiathèque possède 75 romans et 105 documentaires. Elle veut préparer le plus grand nombre de présentoirs identiques, sans livre restant. Détermine le nombre de présentoirs et leur composition.

7 Contrôler une réduction ★★★

Analyse chaque affirmation et justifie ta réponse.

« La fraction $\frac{84}{126}$ est irréductible car 84 et 126 sont tous les deux pairs. »

« Si $\text{PGCD}(a ; b) = 1$, alors a et b sont deux nombres premiers. »

8 Finale : organiser une distribution ★★★

Détermine si la répartition demandée est possible, puis justifie par un calcul de PGCD.

Un organisateur a 184 badges verts et 138 badges jaunes. Il souhaite réaliser le plus grand nombre de sachets identiques, tous remplis et sans reste. Donne le nombre de sachets et le contenu de chacun.

ÉVALUATION

Rédige les calculs nécessaires et soigne chaque conclusion.

Barème : 20 points

1. Détermine $\text{PGCD}(42 ; 56)$. / 2

2. Calcule $\text{PGCD}(119 ; 51)$ par divisions successives. / 4

3. Rends la fraction $119/51$ irréductible. / 3

4. Les nombres 84 et 126 sont-ils premiers entre eux ? Justifie. / 3

5. Avec 175 cartes rouges et 105 cartes noires, détermine le plus grand nombre de paquets identiques possibles et leur composition. / 4

6. Montre que 25 et 36 sont premiers entre eux. / 4

■ Les conseils de Coach Vince

Rédige la chaîne complète

Au brevet, écris les divisions euclidiennes avant d'annoncer le PGCD. Une conclusion du type « donc $\text{PGCD}(252 ; 198) = 18$ » sécurise ton raisonnement.

Vérifie la dernière étape

Pour une fraction, contrôle que le numérateur et le dénominateur obtenus sont premiers entre eux. Pour un partage, multiplie la composition d'un groupe par le nombre de groupes : tu dois retrouver les quantités de départ.

Pour aller plus loin sur exercices-3eme.fr

- › **Toutes les fiches de Mathématiques en 3^e** · [/mathematiques-3eme/](https://exercices-3eme.fr/mathematiques-3eme/)
- › **Le domaine « nombres-calcul » en 3^e** · [/mathematiques-3eme/nombres-calcul/](https://exercices-3eme.fr/mathematiques-3eme/nombres-calcul/)
- › **Préparer le brevet (dates, épreuves, méthode)** · [/brevet/](https://exercices-3eme.fr/brevet/)