

Les identités remarquables en 3^e : cours, méthode et exercices corrigés pour le brevet

3^e

Difficulté ★★★



45 min

Objectif : développer et factoriser une expression

Tombe souvent au brevet

Éco-encre (N&B)

Prénom :

Date :

Compétence visée (programme cycle 4) : Nombres relatifs, puissances, calcul littéral, racines carrées, arithmétique (PGCD, nombres premiers) – les automatismes du brevet.

Coach Vince te résume l'essentiel

- ▶ Trois formules suffisent pour transformer n'importe quel produit de cette famille en somme, ou l'inverse : à toi de les connaître par cœur, sans hésitation.
- ▶ $(a+b)^2$, $(a-b)^2$ et $(a+b)(a-b)$: trois structures à reconnaître d'un coup d'œil, avant même de sortir le crayon.
- ▶ Au brevet, la rigueur fait la différence : cite la formule, applique-la, vérifie ton résultat – c'est ce plan de jeu qui rapporte les points.

AU BREVET, ON TE DEMANDE...

Le brevet teste ta capacité à développer ou factoriser une expression littérale en identifiant la bonne identité remarquable, souvent comme étape intermédiaire pour résoudre une équation produit nul ou simplifier une expression avant de continuer un exercice plus long.

Type de question Question de calcul à justifier, souvent parmi les exercices de type automatismes proposés sans calculatrice en début d'épreuve, ou étape intermédiaire dans un exercice de calcul littéral plus long avec rédaction attendue.

Exemple type Soit $E = (x - 6)(x + 6) - x^2 + 20$. Développe E à l'aide d'une identité remarquable, réduis, puis donne la valeur de E pour $x = 5$.

Alerte piège Oublier de reconnaître l'identité remarquable et développer terme à terme sans méthode, ce qui fait perdre du temps et augmente le risque d'erreur de signe – ou pire, appliquer la mauvaise formule en confondant carré de différence et différence de carrés.

LA LEÇON

Qu'est-ce qu'une identité remarquable ?

Une identité remarquable est une égalité vraie pour tous les nombres relatifs a et b : elle relie une expression écrite sous forme de produit à la même expression écrite sous forme de somme algébrique. Le mot identité signifie que l'égalité est toujours vraie, quels que soient les nombres choisis pour a et b – ce n'est pas une équation à résoudre, mais une transformation d'écriture. Une identité remarquable s'utilise dans les deux sens : développer, c'est-à-dire passer d'un produit à une somme, et factoriser, c'est-à-dire passer d'une somme à un produit. Le programme de 3^e impose de connaître par cœur trois identités remarquables, obtenues en développant systématiquement un produit de deux facteurs identiques ou complémentaires. Chacune porte un nom lié à sa structure de départ : le carré d'une somme, le carré d'une différence, et le produit d'une somme par

une différence. Le vocabulaire compte : un carré parfait désigne un terme qui s'écrit comme le carré d'un nombre ou d'une expression, comme $9x^2$ qui est le carré de $3x$. Le terme central $2ab$ est appelé le double produit : il vaut le double du produit des deux termes a et b , jamais leur simple produit. Reconnaître immédiatement laquelle des trois s'applique à une expression donnée est une compétence clé de calcul littéral, mobilisée dans les exercices de calcul dits « automatismes », souvent proposés en début d'épreuve de mathématiques au brevet, où le temps de réflexion est limité.

Les trois identités à connaître par cœur

Nom	Formule	Développement	Exemple numérique
Carré d'une somme	$(a + b)^2$	$a^2 + 2ab + b^2$	$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$
Carré d'une différence	$(a - b)^2$	$a^2 - 2ab + b^2$	$(x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25$
Somme par différence	$(a + b)(a - b)$	$a^2 - b^2$	$(x + 4)(x - 4) = x^2 - 16$

D'où viennent ces formules ? La démonstration par distributivité

Chaque identité remarquable se démontre par la double distributivité, c'est-à-dire le développement d'un produit de deux sommes. Pour $(a + b)^2$, on part de l'écriture $(a + b)^2 = (a + b) \times (a + b)$, puis on distribue chaque terme du premier facteur sur chaque terme du second facteur : $a \times a + a \times b + b \times a + b \times b$. Comme $a \times b$ et $b \times a$ désignent le même produit, on obtient $a^2 + ab + ab + b^2$, soit $a^2 + 2ab + b^2$ après réduction : le terme du milieu apparaît deux fois, ce qui explique le coefficient 2. Pour $(a - b)^2$, le calcul est identique mais avec des signes opposés : $(a - b) \times (a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Le terme central devient négatif, mais b^2 reste positif, car un produit de deux nombres négatifs, $(-b) \times (-b)$, donne toujours un résultat positif. Pour $(a + b)(a - b)$, les deux termes croisés s'annulent : $a \times a - a \times b + b \times a - b \times b = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$. Il ne reste que la différence des deux carrés. Cette démonstration explique aussi pourquoi les identités remarquables accélèrent le calcul mental : multiplier 51×49 revient à calculer $(50 + 1)(50 - 1)$, soit $50^2 - 1^2 = 2499$, bien plus rapide qu'une multiplication posée. Comprendre cette origine permet de retrouver une formule oubliée le jour de l'épreuve, sans dépendre uniquement de la mémorisation.

Développer une expression avec une identité remarquable : la méthode

- Observe la structure de l'expression : une somme entre parenthèses élevée au carré, une différence entre parenthèses élevée au carré, ou un produit de deux parenthèses contenant les mêmes termes avec des signes opposés.
- Identifie précisément a et b : ce sont les deux termes séparés par $+$ ou par $-$, en gardant leur signe propre si l'un des deux est déjà négatif.
- Choisis la formule correspondant exactement à la structure repérée – ne développe jamais à la main un produit qui correspond à une identité connue, c'est une perte de temps inutile.
- Calcule séparément a^2 , le double produit $2ab$, puis b^2 , en respectant les puissances : si $a = 3x$, alors $a^2 = 9x^2$ et non $3x^2$.
- Assemble les trois termes dans l'ordre de la formule, en conservant le signe du terme central pour un carré de différence.
- Réduis l'expression obtenue si des termes semblables apparaissent après un calcul intermédiaire, et vérifie qu'aucun carré n'a été oublié.
- Pour vérifier ton développement, remplace a et b par deux petits nombres simples (par exemple 1 et 2) des deux côtés de l'égalité : si les deux résultats numériques coïncident, ton développement est probablement correct.

Le piège classique des signes

Dans $(a - b)^2$, le résultat contient $+b^2$ et non $-b^2$: un carré est toujours positif ou nul, quel que soit le signe de b , y compris quand b est déjà négatif. Ne confonds jamais $(a - b)^2$ avec $a^2 - b^2$: $(a - b)^2$ est un carré, il contient trois termes après développement, tandis que $a^2 - b^2$ est déjà une différence de deux carrés, résultat du produit $(a + b)(a - b)$. Ce sont deux identités différentes, avec deux structures de départ différentes, et confondre les deux fait perdre des points automatiques au brevet.

Factoriser avec une identité remarquable

Factoriser consiste à repartir d'une somme algébrique — $a^2 + 2ab + b^2$, $a^2 - 2ab + b^2$ ou $a^2 - b^2$ — pour retrouver le produit qui lui a donné naissance. La méthode se déroule en trois temps. D'abord, vérifie que l'expression contient bien deux carrés parfaits, c'est-à-dire deux termes qui sont chacun le carré d'un nombre ou d'une expression littérale. Ensuite, observe le troisième terme s'il existe : un double produit positif signale un carré de somme, un double produit négatif signale un carré de différence, et l'absence de troisième terme signale une différence de deux carrés. Enfin, identifie a et b à partir des deux carrés repérés, puis écris directement le produit correspondant. La différence de deux carrés, $a^2 - b^2$, se factorise systématiquement en $(a + b)(a - b)$: c'est l'identité la plus utile en 3^e, car elle sert ensuite à résoudre une équation produit nul, en annulant chacun des deux facteurs séparément. Une expression factorisée se prête à d'autres traitements que la forme développée ne permet pas : simplification d'une fraction, étude du signe d'une expression, ou résolution d'équation. Cette rapidité de factorisation est aussi ce qui permet de simplifier mentalement des calculs comme 102×98 , en les réécrivant $(100 + 2)(100 - 2)$.

Exemples résolus

Développer un carré de somme

Énoncé. Développe et réduis l'expression $E = (2x + 5)^2$.

1. On repère la structure : c'est un carré de somme, de la forme $(a + b)^2$ avec $a = 2x$ et $b = 5$.
2. On applique la formule : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
3. On calcule chaque terme séparément : $a^2 = (2x)^2 = 4x^2$; $2ab = 2 \times 2x \times 5 = 20x$; $b^2 = 5^2 = 25$.
4. On assemble les trois termes dans l'ordre : $E = 4x^2 + 20x + 25$.

Résultat : $E = 4x^2 + 20x + 25$

Factoriser une différence de carrés pour résoudre une équation

Énoncé. Factorise $F = 9x^2 - 16$, puis résous l'équation $F = 0$.

1. On repère deux carrés parfaits : $9x^2 = (3x)^2$ et $16 = 4^2$. F est donc une différence de deux carrés, $a^2 - b^2$ avec $a = 3x$ et $b = 4$.
2. On applique la formule : $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, donc $F = (3x + 4)(3x - 4)$.
3. Résoudre $F = 0$ revient à résoudre $(3x + 4)(3x - 4) = 0$, un produit nul : l'un des deux facteurs doit être nul.
4. Premier cas : $3x + 4 = 0$, donc $x = -4/3$. Deuxième cas : $3x - 4 = 0$, donc $x = 4/3$.

Résultat : $F = (3x + 4)(3x - 4)$; les solutions sont $x = -4/3$ et $x = 4/3$.

Calculer astucieusement avec le carré d'une différence

Énoncé. Calcule 98^2 sans poser la multiplication, en utilisant une identité remarquable.

1. On écrit 98 comme une différence proche d'un nombre rond : $98 = 100 - 2$.
2. On reconnaît un carré de différence : $98^2 = (100 - 2)^2$, de la forme $(a - b)^2$ avec $a = 100$ et $b = 2$.
3. On applique la formule : $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = 100^2 - 2 \times 100 \times 2 + 2^2 = 10000 - 400 + 4$.
4. On calcule le résultat final : $10000 - 400 + 4 = 9604$.

Résultat : $98^2 = 9604$

TA SÉANCE D'ENTRAÎNEMENT

1 Associe chaque expression à son identité ★★★

Associe chaque expression à l'identité remarquable qui lui correspond, en précisant a et b.

1. $(x + 9)^2$
2. $(x - 7)^2$
3. $(x + 4)(x - 4)$
4. $(2x - 1)^2$

2 Complète la formule ★★★

Complète chaque formule d'identité remarquable avec le terme manquant.

1. $(a + b)^2 = a^2 + \dots + b^2$
2. $(a - b)^2 = a^2 - \dots + b^2$
3. $(a + b)(a - b) = a^2 - \dots$
4. $a^2 - 2ab + b^2 = (\dots)^2$

3 Développer un carré de somme ★★★

Développe et réduis chaque expression à l'aide de l'identité du carré d'une somme.

1. $(x + 3)^2$
2. $(2x + 1)^2$
3. $(x + 10)^2$

4 Développer un carré de différence ★★★

Développe et réduis chaque expression à l'aide de l'identité du carré d'une différence.

1. $(x - 5)^2$
2. $(3x - 2)^2$
3. $(x - 1)^2$

5 Développer une somme par une différence ★★★

Développe et réduis chaque expression à l'aide du produit d'une somme par une différence.

1. $(x + 6)(x - 6)$
2. $(2x + 3)(2x - 3)$
3. $(x + 1)(x - 1)$

6 Vrai ou faux : les pièges de signes ★★★

Indique si chaque affirmation est vraie ou fausse, en corrigeant les affirmations fausses.

1. $(a - b)^2 = a^2 - b^2$

2. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
3. $a^2 - b^2$ se factorise en $(a - b)^2$

7 Factoriser puis résoudre une équation ★★★

Factorise chaque expression à l'aide d'une identité remarquable, puis résous l'équation associée.

1. Factorise $G = x^2 - 49$, puis résous $G = 0$.

2. Factorise $H = 4x^2 - 25$, puis résous $H = 0$.

8 Rédiger une justification complète ★★★

Rédige la justification complète de chaque calcul, en citant l'identité remarquable utilisée.

Calcule 997×1003 sans poser la multiplication.

Justifie que $E = (x + 8)(x - 8) - x^2 + 70$ est constante (indépendante de x), puis donne sa valeur.

ÉVALUATION

Évalue tes automatismes sur les identités remarquables. Aucune calculatrice autorisée. Rédige chaque étape.

Barème : 20 points

1. Cite les trois identités remarquables au programme de 3^e, sous forme de formules.

/ 3

2. Développe et réduis $(x + 4)^2$.

/ 3

3. Développe et réduis $(3x - 5)^2$.

/ 4

4. Développe et réduis $(x + 9)(x - 9)$.

/ 3

5. Factorise $K = x^2 - 100$, puis résous $K = 0$.

/ 4

6. Sans poser la multiplication, calcule 48×52 en utilisant une identité remarquable, et rédige la justification. / 3

Les conseils de Coach Vince

Cite la formule avant de calculer

Au brevet, écris explicitement la formule que tu utilises — $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, par exemple — avant de remplacer a et b par les termes de l'exercice. Cette étape rapporte des points de méthode, même si le calcul final contient une erreur.

Vérifie ton résultat par substitution numérique

Une fois ton développement ou ta factorisation terminée, remplace a et b par deux petits nombres dans l'expression de départ et dans ton résultat : si les deux valeurs numériques ne coïncident pas, une erreur s'est glissée quelque part.

Pour aller plus loin sur exercices-3eme.fr

- › [Toutes les fiches de Mathématiques en 3^e](#) · /mathematiques-3eme/
- › [Le domaine « nombres-calcul » en 3^e](#) · /mathematiques-3eme/nombres-calcul/
- › [Préparer le brevet \(dates, épreuves, méthode\)](#) · /brevet/