

# Les nombres premiers en 3<sup>e</sup> : cours, exercices et méthode pour le brevet

3<sup>e</sup>

Difficulté ★★★



45 min

Objectif : les nombres premiers

Tombe souvent au brevet

Éco-encre (N&amp;B)

Prénom :

Date :

**Compétence visée (programme cycle 4) :** Reconnaître un nombre premier, décomposer un entier en produit de facteurs premiers et utiliser cette décomposition.

## Coach Vince te résume l'essentiel

- ▶ Un nombre premier possède exactement deux diviseurs positifs distincts : 1 et lui-même.
- ▶ Pour décomposer un entier, divise-le successivement par des nombres premiers jusqu'à obtenir 1.
- ▶ Une décomposition en facteurs premiers sert à trouver des diviseurs, simplifier des fractions et calculer un PGCD ou un PPCM.

## AU BREVET, ON TE DEMANDE...

Tu dois reconnaître un nombre premier en le justifiant, décomposer des entiers et exploiter les facteurs communs dans une fraction ou un problème de divisibilité.

**Type de question** Calcul à justifier, question de cours courte, QCM d'automatismes ou problème utilisant un PGCD et un PPCM.

**Exemple type** Décompose 168 et 252 en produits de facteurs premiers, puis rends irréductible la fraction  $168 \div 252$ .

**Alerte piège** Écrire une décomposition incomplète avec un facteur composé, ou simplifier une fraction sans montrer les facteurs communs.

## LA LEÇON

### Le point de départ : reconnaître un nombre premier

Un nombre premier est un entier positif qui possède exactement deux diviseurs positifs distincts : 1 et lui-même. Ainsi, 2 est premier car ses seuls diviseurs sont 1 et 2. Le nombre 13 est aussi premier : aucun entier autre que 1 et 13 ne le divise. En revanche, 15 n'est pas premier, car  $15 = 3 \times 5$  : il possède notamment 1, 3, 5 et 15 comme diviseurs. Un nombre qui n'est pas premier et qui est supérieur à 1 est appelé composé. Le nombre 1 est un cas à connaître parfaitement : il n'est pas premier, car il n'a qu'un seul diviseur positif, lui-même. Il n'est pas composé non plus. Le nombre 2 est le seul nombre premier pair. Tous les autres nombres pairs sont divisibles par 2 et sont donc composés. Ne confonds pas « impair » et « premier » : 9, 15, 21 et 25 sont impairs, mais ils sont composés. Pour justifier qu'un entier n'est pas premier, il suffit d'exhiber une décomposition en produit de deux entiers supérieurs à 1. Par exemple,  $57 = 3 \times 19$  ; donc 57 n'est pas premier. Pour justifier qu'un entier est premier, tu dois vérifier qu'il n'est divisible par aucun nombre premier pertinent. Ce n'est pas une question d'intuition : tu appliques les critères de divisibilité et tu conclus avec précision.

## Des tests rapides avant de chercher plus loin

| Ce que tu observes                        | Ce que tu peux conclure                                                        | Exemple rigoureux                                                   |
|-------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| Le chiffre des unités est pair            | Le nombre est divisible par 2 ; s'il est différent de 2, il n'est pas premier. | 46 est pair et $46 = 2 \times 23$ : il est composé.                 |
| La somme des chiffres est divisible par 3 | Le nombre est divisible par 3 ; s'il est différent de 3, il n'est pas premier. | $123 : 1 + 2 + 3 = 6$ , divisible par 3. Donc $123 = 3 \times 41$ . |
| Le chiffre des unités est 0 ou 5          | Le nombre est divisible par 5 ; s'il est différent de 5, il n'est pas premier. | $95 = 5 \times 19$ : il est composé.                                |
| Aucun critère ne permet de conclure       | Teste ensuite les diviseurs premiers possibles, sans dépasser $\sqrt{n}$ .     | Pour 97, on teste 2, 3, 5 et 7 car $\sqrt{97} \approx 9,8$ .        |

## Tester un nombre : un plan de jeu efficace

- Commence par les cas particuliers. Si le nombre vaut 1, il n'est pas premier. S'il vaut 2, 3 ou 5, il est premier.
- Utilise les critères de divisibilité par 2, 3 et 5. Ils éliminent rapidement beaucoup de nombres composés.
- Si le nombre résiste, teste les nombres premiers dans l'ordre : 7, 11, 13, puis les suivants si nécessaire. Il est inutile de tester un nombre composé : si un entier est divisible par 9, il est déjà divisible par 3.
- Arrête les essais dès que le diviseur testé dépasse  $\sqrt{n}$ . En effet, si  $n = a \times b$  avec  $a$  et  $b$  supérieurs à 1, l'un des deux facteurs est inférieur ou égal à  $\sqrt{n}$ . Donc, si aucun diviseur premier inférieur ou égal à  $\sqrt{n}$  ne divise  $n$ ,  $n$  est premier.
- Rédige une conclusion complète. Pour 97 : « 97 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 7. Or  $\sqrt{97} \approx 9,8$ . 97 est donc premier. »
- Ne transforme pas ce test en liste interminable. Pour 101,  $\sqrt{101}$  est un peu supérieur à 10 : tu testes seulement 2, 3, 5 et 7. Il ne sert à rien de tester 11, car 11 est supérieur à  $\sqrt{101}$ .
- Garde les diviseurs positifs dans ton raisonnement. Les nombres négatifs peuvent diviser un entier, mais la définition scolaire d'un nombre premier porte sur ses diviseurs positifs.

## Décomposer un entier en produit de facteurs premiers

Toute décomposition concerne un entier positif supérieur ou égal à 2. Tu écris cet entier comme un produit de nombres premiers uniquement. La méthode est toujours la même : cherche le plus petit facteur premier possible, effectue la division, puis recommence avec le quotient. Pour 180 :  $180 = 2 \times 90$ , puis  $90 = 2 \times 45$ , puis  $45 = 3 \times 15$ , puis  $15 = 3 \times 5$ . Comme 2, 3 et 5 sont premiers, tu conclus :  $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ . Les puissances servent à raccourcir l'écriture :  $2^2$  signifie  $2 \times 2$  et  $3^2$  signifie  $3 \times 3$ . Vérifie ta décomposition en recalculant le produit :  $2^2 \times 3^2 \times 5 = 4 \times 9 \times 5 = 180$ . L'ordre des facteurs n'a aucune importance, mais l'écriture croissante est plus lisible. La décomposition en facteurs premiers d'un entier est unique, à l'ordre des facteurs près. Ainsi, une écriture contenant 4 ou 9 n'est pas terminée :  $4 = 2^2$  et  $9 = 3^2$  doivent encore être décomposés. Termine proprement : uniquement des nombres premiers, puis une égalité vérifiée.

## Utiliser les décompositions : fractions, diviseurs, PGCD et PPCM

La décomposition en facteurs premiers devient utile quand deux entiers apparaissent dans le même calcul. Pour simplifier une fraction, décompose le numérateur et le dénominateur, puis supprime seulement les facteurs communs. Par exemple,  $84 = 2^2 \times 3 \times 7$  et  $126 = 2 \times 3^2 \times 7$ . Donc  $84 \div 126 = (2 \times 3 \times 7) \div (3 \times 7) = 2 \div 3$ . Tu ne peux jamais supprimer un terme dans une somme ou une différence : la simplification par facteurs concerne un produit. La décomposition permet aussi de déterminer les diviseurs. Si  $72 = 2^3 \times 3^2$ , un diviseur positif de 72 s'obtient en choisissant une puissance de 2 parmi  $2^0, 2^1, 2^2, 2^3$  et une puissance de 3 parmi  $3^0, 3^1, 3^2$ . Ici,  $2^0$  vaut 1. Par exemple,  $2^2 \times 3 = 12$  divise 72. En revanche,  $2^4 \times 3$  ne divise pas 72, car la puissance de 2 est trop grande. Pour calculer le

PGCD de deux entiers, conserve les facteurs premiers communs avec les plus petits exposants. Avec  $48 = 2^4 \times 3$  et  $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ , le PGCD vaut  $2^2 \times 3 = 12$ . Pour calculer le PPCM, prends tous les facteurs premiers présents avec les plus grands exposants :  $2^4 \times 3 \times 5 = 240$ . Le PGCD sert notamment à réduire une fraction au maximum ; le PPCM sert à chercher un multiple commun. À chaque fois, pose les décompositions avant de choisir les facteurs. Cette étape protège ton calcul et rend ta justification lisible.

## Exemples résolus

### Déterminer si 83 est premier

**Énoncé.** Justifie que 83 est un nombre premier.

1. 83 n'est pas divisible par 2 car il est impair.
2.  $8 + 3 = 11$ , qui n'est pas divisible par 3 : 83 n'est pas divisible par 3.
3. 83 ne se termine ni par 0 ni par 5 : il n'est pas divisible par 5.
4.  $\sqrt{83} \approx 9,1$ . Les seuls nombres premiers à tester jusqu'à 9,1 sont 2, 3, 5 et 7.
5.  $83 = 7 \times 11 + 6$ , donc 83 n'est pas divisible par 7.
6. 83 n'a aucun diviseur premier inférieur ou égal à  $\sqrt{83}$ .

**Résultat :** 83 est un nombre premier.

### Décomposer 252 en facteurs premiers

**Énoncé.** Donne la décomposition en produit de facteurs premiers de 252.

1. 252 est pair :  $252 = 2 \times 126$ .
2. 126 est pair :  $126 = 2 \times 63$ .
3. 63 est divisible par 3 :  $63 = 3 \times 21$ .
4.  $21 = 3 \times 7$ .
5. Tous les facteurs obtenus sont premiers : 2, 2, 3, 3 et 7.
6. Regroupe les facteurs identiques :  $252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$ .
7. Vérifie :  $2^2 \times 3^2 \times 7 = 4 \times 9 \times 7 = 252$ .

**Résultat :**  $252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$ .

### Simplifier une fraction avec les facteurs premiers

**Énoncé.** Simplifie la fraction  $150 \div 210$ .

1. Décompose le numérateur :  $150 = 2 \times 3 \times 5^2$ .
2. Décompose le dénominateur :  $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$ .
3. Les facteurs communs sont 2, 3 et 5.
4. Après simplification, il reste 5 au numérateur et 7 au dénominateur.

**Résultat :**  $150 \div 210 = 5 \div 7$ .

# TA SÉANCE D'ENTRAÎNEMENT

## 1 Premier échauffement ★★★

Indique si chaque nombre est premier ou non.

1. 2 .....
2. 27 .....
3. 29 .....
4. 1 .....

## 2 Repère le bon critère ★★★

Complète chaque justification.

1. 45 n'est pas premier car ... ..
2. 91 n'est pas premier car ... ..
3. 37 est premier car ... ..

## 3 Passe aux facteurs premiers ★★★

Décompose chaque entier en produit de facteurs premiers.

1. 54 .....
2. 70 .....
3. 100 .....

## 4 Vrai ou faux ? ★★★

Décide puis justifie chaque affirmation.

1. « 51 est premier car il est impair. » .....
2. «  $84 = 2^2 \times 3 \times 7$  est une décomposition en facteurs premiers. » .....
3. « 49 est premier car il n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5. » .....

## 5 Simplifie avec méthode ★★★

Simplifie chaque fraction en utilisant les décompositions en facteurs premiers.

1.  $72 \div 120$  .....
2.  $98 \div 147$  .....

## 6 Choisis les bons exposants ★★★

Calcule le PGCD et le PPCM de chaque paire d'entiers.

1. 48 et 60

## 2. 36 et 90

### 7 Justification complète ★★★

Justifie que 113 est un nombre premier.

Rédige une démonstration courte et complète.

### 8 Analyse les diviseurs ★★★

Détermine si chaque nombre proposé divise 360 en justifiant par la décomposition en facteurs premiers.

72

45

40

## ÉVALUATION

Réponds avec soin. Justifie les réponses lorsque cela est demandé.

Barème : 20 points

1. Indique si 59 est premier et justifie.

/ 3

2. Décompose 420 en produit de facteurs premiers.

/ 3

3. Décompose 294 en produit de facteurs premiers.

/ 3

4. Simplifie la fraction  $294 \div 420$  en utilisant les décompositions précédentes.

/ 4

5. Calcule le PGCD de 294 et 420.

/ 3

6. Calcule le PPCM de 294 et 420.

/ 4

## Les conseils de Coach Vince

### Écris la preuve, pas seulement le verdict

Pour dire qu'un nombre est premier, indique les diviseurs premiers testés et compare avec  $\sqrt{n}$ . Une conclusion seule ne suffit pas à montrer ta méthode.

### Contrôle ta finale

Après une décomposition, recalcule mentalement le produit obtenu. Après une simplification de fraction, vérifie qu'aucun facteur premier commun ne reste.

### Pour aller plus loin sur [exercices-3eme.fr](https://exercices-3eme.fr)

- › Toutes les fiches de Mathématiques en 3<sup>e</sup> · [mathematiques-3eme/](/mathematiques-3eme/)
- › Le domaine « nombres-calcul » en 3<sup>e</sup> · [mathematiques-3eme/nombres-calcul/](/mathematiques-3eme/nombres-calcul/)
- › Préparer le brevet (dates, épreuves, méthode) · [brevet/](/brevet/)