

# Les racines carrées en 3<sup>e</sup> : cours, exercices et méthode pour le brevet

3<sup>e</sup>

Difficulté ★★

 45 min

Objectif : les racines carrées

Tombe souvent au brevet

Éco-encre (N&amp;B)

Prénom :

Date :

**Compétence visée (programme cycle 4) :** Utiliser la racine carrée d'un nombre positif : définition, valeurs exactes et approchées, règles de calcul sur les produits et les quotients.

## Coach Vince te résume l'essentiel

- ▶  $\sqrt{a}$  est le nombre positif ou nul dont le carré vaut  $a$ , à condition que  $a$  soit positif ou nul.
- ▶ Une racine carrée peut donner une valeur exacte, comme  $\sqrt{49} = 7$ , ou une valeur approchée, comme  $\sqrt{7} \approx 2,65$ .
- ▶ Avant tout calcul, repère les carrés parfaits : c'est ton point de départ pour simplifier sans erreur.

## AU BREVET, ON TE DEMANDE...

Tu peux devoir simplifier une racine carrée, donner un arrondi, contrôler une égalité ou calculer une longueur avec Pythagore.

**Type de question** Calcul à justifier, question de cours, QCM d'automatismes ou problème géométrique avec rédaction.

**Exemple type** Dans un triangle GHI rectangle en G,  $GH = 6$  cm et  $GI = 11$  cm. Calcule la longueur HI, puis donne une valeur approchée au dixième.

**Alerte piège** Écrire une valeur décimale avec le signe  $=$ , séparer une somme sous une racine ou oublier que la racine carrée d'une longueur est positive.

## LA LEÇON

### Comprendre ce que signifie $\sqrt{a}$

La racine carrée est une opération définie pour les nombres positifs ou nuls. Pour tout nombre  $a$  tel que  $a \geq 0$ ,  $\sqrt{a}$  désigne l'unique nombre positif ou nul dont le carré est égal à  $a$ . Ainsi,  $\sqrt{25} = 5$  car  $5^2 = 25$ . De même,  $\sqrt{0} = 0$  car  $0^2 = 0$ . Le symbole  $\sqrt{\phantom{x}}$  se lit « racine carrée de ». Il ne faut pas le confondre avec une puissance : dans  $5^2$ , tu cherches le carré de 5 ; dans  $\sqrt{25}$ , tu cherches le nombre dont le carré donne 25. La racine carrée est toujours positive ou nulle. C'est une règle essentielle :  $\sqrt{81} = 9$ , et non  $-9$ , puisque le symbole  $\sqrt{\phantom{x}}$  désigne seulement la racine positive ou nulle. Pourtant, les deux nombres 9 et  $-9$  ont pour carré 81. Cette différence apparaît quand tu résous une équation. Si  $x^2 = 81$ , alors  $x = 9$  ou  $x = -9$ . En revanche,  $\sqrt{81} = 9$  uniquement. Retenir cette distinction t'évite une confusion très fréquente. Certains nombres ont une racine carrée entière : ce sont les carrés parfaits. Tu dois connaître rapidement 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 et 100. Par exemple,  $\sqrt{64} = 8$  car  $8^2 = 64$ . À l'inverse, 50 n'est pas un carré parfait :  $\sqrt{50}$  n'est donc pas un entier. Il peut néanmoins s'écrire sous une forme exacte simplifiée ou recevoir une valeur approchée. Pour démarrer correctement, vérifie toujours si le nombre sous le radical est un carré parfait.

## Valeur exacte ou valeur approchée : choisis la bonne écriture

| Situation                                                      | Écriture attendue        | Justification                                                            |
|----------------------------------------------------------------|--------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| Le nombre sous le radical est un carré parfait                 | $\sqrt{144} = 12$        | $12^2 = 144$ : le résultat est exact.                                    |
| Le nombre peut être simplifié grâce à un facteur carré parfait | $\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$  | $75 = 25 \times 3$ , donc $\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = 5\sqrt{3}$ . |
| Tu veux une écriture décimale                                  | $\sqrt{10} \approx 3,16$ | Le symbole $\approx$ indique que 3,16 n'est pas la valeur exacte.        |
| Tu encadres une racine                                         | $6 < \sqrt{40} < 7$      | $6^2 = 36$ et $7^2 = 49$ , or $36 < 40 < 49$ .                           |

## Ton plan de calcul pour encadrer et simplifier

- Pour encadrer  $\sqrt{a}$  : cherche deux carrés parfaits consécutifs qui encadrent  $a$ . Pour  $\sqrt{30}$ , tu constates que  $5^2 = 25$  et  $6^2 = 36$ . Comme  $25 < 30 < 36$ , alors  $5 < \sqrt{30} < 6$ . Cet encadrement permet déjà de contrôler la cohérence d'un résultat donné par la calculatrice.
- Pour obtenir une valeur approchée : utilise la touche  $\sqrt{\phantom{x}}$  de la calculatrice seulement si une valeur décimale est demandée. Recopie le symbole  $\approx$ , puis respecte l'arrondi demandé. Par exemple,  $\sqrt{12} \approx 3,46$  au centième. Écrire  $\sqrt{12} = 3,46$  serait faux, car  $3,46^2$  n'est pas exactement égal à 12.
- Pour simplifier  $\sqrt{a}$  : décompose  $a$  en un produit contenant le plus grand carré parfait possible. Pour  $\sqrt{108}$ , écris  $108 = 36 \times 3$ . Comme 36 et 3 sont positifs,  $\sqrt{108} = \sqrt{(36 \times 3)} = \sqrt{36} \times \sqrt{3} = 6\sqrt{3}$ . La forme  $6\sqrt{3}$  est exacte et plus simple que  $\sqrt{108}$ .
- Ne découpe pas une somme ou une différence : la règle  $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$  est valable seulement lorsque  $a$  et  $b$  sont positifs ou nuls. Elle ne permet pas d'écrire  $\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ . Contre-exemple :  $\sqrt{(9 + 16)} = \sqrt{25} = 5$ , alors que  $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$ .
- Contrôle ta simplification : élève ton résultat au carré. Pour vérifier  $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ , calcule  $(6\sqrt{2})^2 = 6^2 \times (\sqrt{2})^2 = 36 \times 2 = 72$ . Cette vérification est courte et solide : elle valide ton calcul.

## Règles sur un produit et un quotient

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres positifs ou nuls. Tu peux écrire  $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ . Cette égalité est utile pour faire sortir un carré parfait du radical. Par exemple,  $\sqrt{(16 \times 7)} = \sqrt{16} \times \sqrt{7} = 4\sqrt{7}$ . Tu peux aussi l'utiliser dans l'autre sens :  $3\sqrt{5} = \sqrt{9} \times \sqrt{5} = \sqrt{45}$ . Pour un quotient, la règle  $\sqrt{a \div b} = \sqrt{a} \div \sqrt{b}$  est valable si  $a \geq 0$  et  $b > 0$ . Le dénominateur ne peut jamais être nul. Par exemple,  $\sqrt{(49 \div 4)} = \sqrt{49} \div \sqrt{4} = 7 \div 2 = 3,5$ . Cette écriture est exacte car  $3,5^2 = 12,25$  et  $49 \div 4 = 12,25$ . Ces règles concernent uniquement les produits et les quotients de nombres positifs ou nuls. Elles ne donnent aucune règle pour une addition, une soustraction ou une puissance quelconque. Garde la structure du calcul sous les yeux : produit, quotient, somme ou différence ne se traitent pas de la même manière.

## Utiliser une racine carrée dans un calcul de longueur

Les racines carrées interviennent souvent après le théorème de Pythagore. Ce théorème s'applique uniquement dans un triangle rectangle. Si un triangle ABC est rectangle en A, alors le côté opposé à l'angle droit, BC, est l'hypoténuse et vérifie  $BC^2 = AB^2 + AC^2$ . Si tu cherches la longueur BC, tu obtiens d'abord son carré, puis tu prends une racine carrée :  $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2}$ . Comme une longueur est positive, tu conserves la racine carrée positive. Supposons que  $AB = 9$  cm et  $AC = 12$  cm dans un triangle rectangle en A. Tu rédiges : « D'après le théorème de Pythagore,  $BC^2 = AB^2 + AC^2$ . Donc  $BC^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$ . Ainsi  $BC = \sqrt{225} = 15$ . » La conclusion complète est : « BC mesure 15 cm. » Les unités apparaissent à la fin, après le calcul. Ne saute pas directement de 9 et 12 à 15 : la ligne contenant le théorème justifie ton raisonnement. Quand le résultat n'est pas un carré parfait, garde d'abord la forme exacte. Avec  $AB = 5$  cm et  $AC = 7$  cm, tu obtiens  $BC^2 = 5^2 + 7^2 = 74$ , donc  $BC = \sqrt{74}$  cm. Si l'énoncé demande un arrondi au dixième, écris ensuite  $BC \approx 8,6$  cm. La valeur exacte  $\sqrt{74}$  est plus précise ; la valeur décimale dépend de l'arrondi choisi. Lis donc la consigne jusqu'au dernier mot. Dernière vérification : l'hypoténuse est le plus long côté du triangle rectangle. Dans l'exemple avec 5 cm et 7 cm, une hypoténuse

proche de 8,6 cm est cohérente puisqu'elle dépasse 7 cm. Cette vérification ne remplace pas la démonstration, mais elle repère une erreur de touche, de carré ou d'addition. Reste précis : définition, règle adaptée, calcul ordonné, puis conclusion.

## Exemples résolus

### Simplifier une racine carrée

**Énoncé.** Écris  $\sqrt{180}$  sous la forme  $a\sqrt{b}$ , avec  $b$  le plus petit possible.

1. Repère un grand carré parfait dans 180 :  $180 = 36 \times 5$ .
2. Les nombres 36 et 5 sont positifs, donc  $\sqrt{180} = \sqrt{(36 \times 5)} = \sqrt{36} \times \sqrt{5}$ .
3. Comme  $\sqrt{36} = 6$ , on obtient  $\sqrt{180} = 6\sqrt{5}$ .
4. Vérifie :  $(6\sqrt{5})^2 = 36 \times 5 = 180$ .

**Résultat :**  $\sqrt{180} = 6\sqrt{5}$ .

### Calculer l'hypoténuse d'un triangle rectangle

**Énoncé.** Le triangle DEF est rectangle en D. DE = 8 cm et DF = 15 cm. Calcule EF.

1. EF est le côté opposé à l'angle droit : c'est l'hypoténuse.
2. D'après le théorème de Pythagore,  $EF^2 = DE^2 + DF^2$ .
3.  $EF^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289$ .
4. Comme EF est une longueur positive,  $EF = \sqrt{289} = 17$ .

**Résultat :** EF mesure 17 cm.

### Donner une valeur approchée justifiée

**Énoncé.** Encadre  $\sqrt{45}$  entre deux entiers consécutifs, puis donne sa valeur approchée au dixième.

1. Calcule les carrés voisins :  $6^2 = 36$  et  $7^2 = 49$ .
2. Comme  $36 < 45 < 49$ , on a  $6 < \sqrt{45} < 7$ .
3. La calculatrice donne  $\sqrt{45} \approx 6,708...$
4. Arrondie au dixième, cette valeur devient 6,7.

**Résultat :**  $6 < \sqrt{45} < 7$  et  $\sqrt{45} \approx 6,7$ .

# TA SÉANCE D'ENTRAÎNEMENT

## 1 Réflexes sur les carrés parfaits ★★★

Calcule chaque racine carrée.

1.  $\sqrt{36}$  .....

2.  $\sqrt{121}$  .....

3.  $\sqrt{0}$  .....

## 2 Le bon symbole ★★★

Complète avec = ou  $\approx$ .

1.  $\sqrt{169} \dots 13$  .....

2.  $\sqrt{7} \dots 2,65$  .....

3.  $\sqrt{2} \dots 1,4$  .....

## 3 Choisis l'égalité correcte ★★★

Choisis la seule égalité vraie.

1. Pour des nombres a et b positifs ou nuls : a)  $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$  ; b)  $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$  ; c)  $\sqrt{a-b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$  ; d)  $\sqrt{a^2} = a$  pour tout nombre a.

## 4 Simplifications exactes ★★★

Simplifie chaque écriture.

1.  $\sqrt{12}$  .....

2.  $\sqrt{45}$  .....

3.  $\sqrt{200}$  .....

## 5 Racines de quotients ★★★

Calcule en utilisant la règle du quotient lorsque ses conditions sont vérifiées.

1.  $\sqrt{81 \div 16}$  .....

2.  $\sqrt{25 \div 4}$  .....

## 6 Vrai ou faux ? ★★★

Indique si chaque affirmation est vraie ou fausse, puis corrige-la si nécessaire.

1.  $\sqrt{49} = -7$ . .....

2.  $\sqrt{4 \times 25} = 10$ . .....

3.  $\sqrt{1+8} = \sqrt{1} + \sqrt{8}$ . .....

## 7 Une longueur exacte ★★★

Rédige le calcul de la longueur AC.

Le triangle ABC est rectangle en B.  $AB = 7$  cm et  $BC = 9$  cm. Calcule AC sous forme exacte, puis donne un arrondi au dixième.

## 8 Analyse et justification ★★★

Justifie laquelle des deux égalités est correcte.

Un élève affirme que  $\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ . Un autre affirme que  $\sqrt{75} = 3\sqrt{5}$ . Qui a raison ?

## ÉVALUATION

Réponds sans calculatrice sauf lorsqu'une valeur approchée est demandée. Rédige les justifications nécessaires.

Barème : 20 points

1. Calcule  $\sqrt{196}$ . / 2

2. Encadre  $\sqrt{70}$  entre deux entiers consécutifs. / 3

3. Simplifie  $\sqrt{147}$ . / 3

4. Explique pourquoi  $\sqrt{(16 + 9)}$  n'est pas égal à  $\sqrt{16} + \sqrt{9}$ . / 3

5. Le triangle JKL est rectangle en J.  $JK = 12$  cm et  $JL = 16$  cm. Calcule KL. / 5

6. Dans un triangle MNP rectangle en M,  $MN = 4$  cm et  $MP = 6$  cm. Donne NP sous forme exacte puis au dixième. / 4

## ■ Les conseils de Coach Vince

### **Annonce la règle utile**

Avant de simplifier, écris la décomposition qui contient un carré parfait. Dans un triangle rectangle, cite d'abord le théorème de Pythagore avant de remplacer les longueurs.

### **Fais le contrôle final**

Une valeur approchée doit porter le symbole  $\approx$ , jamais le signe  $=$ . Pour une longueur, vérifie que l'hypoténuse obtenue est plus grande que les deux autres côtés.

### **Pour aller plus loin sur [exercices-3eme.fr](https://exercices-3eme.fr)**

- › **Toutes les fiches de Mathématiques en 3<sup>e</sup>** · [/mathematiques-3eme/](https://exercices-3eme.fr/mathematiques-3eme/)
- › **Le domaine « nombres-calcul » en 3<sup>e</sup>** · [/mathematiques-3eme/nombres-calcul/](https://exercices-3eme.fr/mathematiques-3eme/nombres-calcul/)
- › **Préparer le brevet (dates, épreuves, méthode)** · [/brevet/](https://exercices-3eme.fr/brevet/)