LE QG 3E · MATHÉMATIQUES · NOMBRES-CALCUL

Mathématiques en 3e : cours, exercices et méthode pour le brevet

3e | Difficulté ★★★ | 45 min | Objectif : Mathématiques | Tombe souvent au brevet | Fiche élève

Prénom : .....

Date : .....

Compétence visée (programme cycle 4) : Nombres relatifs, puissances, calcul littéral, racines carrées, arithmétique (PGCD, nombres premiers). les automatismes du brevet.

Coach Vince te résume l'essentiel

- Respecte les priorités de calcul : parenthèses, puissances et racines, multiplications et divisions, puis additions et soustractions.
- Une règle de calcul n'est utile que si tu vérifies sa condition : même base pour les puissances, termes semblables pour réduire, facteur commun pour factoriser.
- Au brevet, écris les étapes importantes : un calcul juste mais non justifié peut cacher une erreur de méthode.

AU BREVET, ON TE DEMANDE...

Tu dois calculer sans erreur, simplifier une expression, résoudre une équation simple ou utiliser un PGCD dans une situation concrète en rédigeant les étapes utiles.

Type de question	Calcul à justifier, QCM d'automatismes sans calculatrice, expression littérale à transformer, problème de divisibilité ou de fraction à simplifier.
Exemple type	On donne $C = 2(3x - 4) + 5x$. Développe et réduis C, puis calcule sa valeur pour $x = -2$.
Alerte piège	Appliquer une règle hors de sa condition : additionner des exposants avec des bases différentes, réduire des termes non semblables ou oublier qu'une racine carrée est positive ou nulle.

LA LEÇON

1. Sécuriser les calculs avec les nombres relatifs

Un nombre relatif possède un signe : positif ou négatif. Le signe + d'un nombre positif est souvent invisible ; +7 et 7 désignent le même nombre. Le signe − fait partie du nombre : dans $-8 + 3$, le premier signe est celui de −8 et le second est l'opération d'addition. Pour additionner deux nombres de même signe, additionne leurs distances à zéro et conserve le signe commun. Ainsi, $-6 + (-11) = -17$. Pour additionner deux nombres de signes contraires, soustrais la plus petite distance à zéro de la plus grande et garde le signe du nombre ayant la plus grande distance à zéro : $-14 + 9 = -5$. Soustraire un nombre revient à ajouter son opposé : $7 - (-4) = 7 + 4 = 11$. Cette transformation est particulièrement utile dès qu'une parenthèse suit un signe −. Attention : $-(a + b) = -a - b$, car tu multiplies toute la parenthèse par −1. Par exemple, $-(3 - 8) = -3 + 8 = 5$. Pour un produit ou un quotient de nombres relatifs, applique la règle des signes seulement après avoir identifié les facteurs ou les diviseurs : même signe, résultat positif ; signes différents, résultat négatif. Ainsi, $(-5) \times (-3) = 15$, tandis que $24 \div (-6) = -4$. Dans une expression sans parenthèses, respecte toujours les priorités : calcule d'abord les parenthèses, puis les puissances et les racines carrées, ensuite les multiplications et divisions dans l'ordre de gauche à droite, enfin les

additions et soustractions dans l'ordre de gauche à droite. Ne mélange pas ces étapes. Dans $A = -3 + 4 \times (-2)$, le produit vaut -8 avant l'addition ; donc $A = -3 - 8 = -11$. Écrire une ligne de calcul par transformation évite de perdre un signe. Coach Vince te le rappelle : le signe est un élément du calcul, jamais un détail décoratif.

2. Puissances : lire, calculer et transformer

Écriture	Sens exact	Règle et condition	Exemple
a^n	a est multiplié par lui-même n fois, lorsque n est un entier positif.	a^2 est le carré de a ; a^3 est le cube de a.	$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$.
$a^m \times a^n$	Produit de puissances de même base.	Tu additionnes les exposants seulement si la base est exactement la même : $a^m \times a^n = a^{m+n}$.	$2^4 \times 2^3 = 2^7 = 128$.
$a^m \div a^n$	Quotient de puissances de même base non nulle.	Tu soustrais les exposants seulement si $a \neq 0$: $a^m \div a^n = a^{m-n}$.	$7^6 \div 7^2 = 7^4 = 2\,401$.
$(a^m)^n$	Puissance d'une puissance.	Tu multiplies les exposants : $(a^m)^n = a^{mn}$.	$(3^2)^4 = 3^8 = 6\,561$.
a^0	Puissance d'exposant nul.	Pour tout nombre a non nul, $a^0 = 1$.	$12^0 = 1$.

3. Calcul littéral : développer, réduire et factoriser

- Une expression littérale contient une ou plusieurs lettres qui représentent des nombres. Dans $4x - 7$, la lettre x peut prendre différentes valeurs. Pour calculer une valeur numérique, remplace chaque lettre par sa valeur en conservant les parenthèses. Si $x = -2$, alors $4x - 7 = 4 \times (-2) - 7 = -15$. Sans les parenthèses, le signe du nombre négatif peut être mal traité.
- Développer consiste à supprimer une parenthèse précédée d'une multiplication. La distributivité donne $k(a + b) = ka + kb$ et $k(a - b) = ka - kb$, pour tous nombres k, a et b. Ainsi, $5(2x - 3) = 10x - 15$. Si le facteur est négatif, distribue-le aussi : $-2(3x - 4) = -6x + 8$. Tu ne peux pas supprimer une parenthèse sans modifier les signes lorsqu'elle est précédée de -1 : $-(x - 5) = -x + 5$.
- Réduire consiste à regrouper uniquement les termes semblables, c'est-à-dire ceux qui ont exactement la même partie littérale. $3x + 8x = 11x$, mais $3x + 8$ ne se réduit pas. De même, $2x^2 + 5x^2 = 7x^2$, tandis que $2x^2 + 5x$ reste inchangé : x^2 et x ne sont pas semblables. Après développement, range les termes de même nature : $4x - 6 + 3x + 9 = 7x + 3$.
- Factoriser est l'opération inverse du développement. Tu cherches un facteur commun à tous les termes. Dans $12x - 18$, 6 est commun : $12x - 18 = 6(2x - 3)$. Dans $8x^2 + 4x$, 4x est commun : $8x^2 + 4x = 4x(2x + 1)$. Vérifie toujours ton résultat en développant mentalement la forme factorisée.
- Une égalité doit rester vraie pour les valeurs autorisées de la lettre. Lorsque tu résous une équation, tu effectues la même opération sur les deux membres. Pour $3x - 5 = 16$, ajoute 5 aux deux membres, puis divise les deux membres par 3 : $3x = 21$, donc $x = 7$. Ne divise jamais par une expression dont tu ne sais pas si elle vaut zéro.

4. Racines carrées : une définition à connaître sans approximation

La racine carrée d'un nombre positif ou nul est l'unique nombre positif ou nul dont le carré donne ce nombre. $\sqrt{49} = 7$ car $7^2 = 49$. Le nombre -7 possède aussi pour carré 49, mais $\sqrt{49}$ ne vaut jamais -7 : le symbole $\sqrt{}$ désigne la racine positive ou nulle. Dans les nombres réels, $\sqrt{a}$ existe seulement si $a \geq 0$. Tu peux donc écrire $\sqrt{0} = 0$ et $\sqrt{81} = 9$, mais $\sqrt{(-9)}$ n'a pas de valeur réelle. Ne confonds pas $\sqrt{(a^2)}$ et a : pour tout nombre réel a, $\sqrt{(a^2)}$ est la distance de a à zéro. Ainsi $\sqrt{((-6)^2)} = \sqrt{36} = 6$. Les racines carrées exactes les plus fréquentes

proviennent des carrés parfaits : 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 et 100. Pour comparer deux racines carrées, compare les nombres placés sous les signes $\sqrt{}$, uniquement parce que la fonction racine carrée conserve l'ordre sur les nombres positifs ou nuls. Comme $45 < 64$, $\sqrt{45} < 8$. Si une racine ne se calcule pas exactement, garde-la sous forme $\sqrt{a}$ tant qu'aucune valeur approchée n'est demandée. Une valeur décimale arrondie trop tôt peut fausser la suite d'un calcul.

5. Nombres premiers et PGCD : organiser les diviseurs

Un nombre premier est un entier supérieur à 1 qui possède exactement deux diviseurs positifs distincts : 1 et lui-même. Ainsi, 2, 3, 5, 7 et 11 sont premiers. Le nombre 1 n'est pas premier, car il n'a qu'un seul diviseur positif. Pour savoir si un entier est premier, cherche s'il admet un diviseur premier autre que 1 et lui-même. Tu peux t'arrêter lorsque les diviseurs testés deviennent trop grands pour former un produit inférieur ou égal au nombre étudié. La décomposition en produit de facteurs premiers consiste à écrire un entier comme produit de nombres premiers. Par exemple, $84 = 2 \times 42 = 2 \times 2 \times 21 = 2^2 \times 3 \times 7$. Cette écriture permet de repérer efficacement les diviseurs communs. Le PGCD de deux entiers non nuls est leur plus grand diviseur commun. Avec $84 = 2^2 \times 3 \times 7$ et $126 = 2 \times 3^2 \times 7$, les facteurs premiers communs sont 2, 3 et 7. Donc PGCD(84 ; 126) $= 2 \times 3 \times 7 = 42$. Tu peux aussi utiliser l'algorithme d'Euclide : le PGCD de deux nombres est égal au PGCD du plus petit nombre et du reste de la division euclidienne du plus grand par le plus petit. Cette méthode fonctionne pour des entiers positifs. Le PGCD sert notamment à simplifier une fraction : divise le numérateur et le dénominateur par leur PGCD. Ainsi, $84 \div 126 = 2 \div 3$ après division par 42, donc $84 \div 126 = 2 \div 3$. Dans un problème de partage en groupes identiques, le PGCD donne souvent le plus grand nombre de groupes possibles. Lis toutefois la situation : un calcul de PGCD doit toujours répondre à une question de diviseurs communs.

Exemples résolus

Calculer une expression avec priorités et racine carrée

Énoncé. Calcule $A = (-5)^2 - 3 \times (-4) + \sqrt{49}$.

1. Calcule d'abord la puissance : $(-5)^2 = 25$.
2. Calcule ensuite le produit : $3 \times (-4) = -12$.
3. Calcule la racine carrée : $\sqrt{49} = 7$.
4. Remplace dans l'expression : $A = 25 - (-12) + 7$.
5. Soustraire un nombre négatif revient à ajouter son opposé : $A = 25 + 12 + 7 = 44$.

Résultat : $A = 44$.

Développer puis réduire une expression littérale

Énoncé. Réduis $B = 3(2x - 5) - 4x + 9$.

1. Applique la distributivité à $3(2x - 5)$: $3(2x - 5) = 6x - 15$.
2. Remplace dans l'expression : $B = 6x - 15 - 4x + 9$.
3. Regroupe les termes semblables : $6x - 4x = 2x$ et $-15 + 9 = -6$.
4. Écris la forme réduite.

Résultat : $B = 2x - 6$.

Trouver un PGCD par l'algorithme d'Euclide

Énoncé. Détermine PGCD(252 ; 198), puis simplifie la fraction $252 \div 198$.

1. Effectue la première division euclidienne : $252 = 1 \times 198 + 54$.
2. Poursuis : $198 = 3 \times 54 + 36$.

3. Continue : $54 = 1 \times 36 + 18$.
4. Termine : $36 = 2 \times 18 + 0$. Le dernier reste non nul est 18.
5. Divise le numérateur et le dénominateur par 18 : $252 \div 18 = 14$ et $198 \div 18 = 11$.

Résultat : PGCD(252 ; 198) = 18 et $252 \div 198 = 14 \div 11$.

TA SÉANCE D'ENTRAÎNEMENT

1 Échauffement : signes et priorités ★☆☆

Calcule chaque expression en détaillant une ligne intermédiaire.

1. $A = -7 + 12 - (-5)$ .....
2. $B = (-3) \times (-8) \div 4$ .....
3. $C = 9 - 2 \times (-6)$ .....

2 Automatismes : puissances et racines ★☆☆

Complète chaque égalité.

1. $2^3 \times 2^5 = 2...$ .....
2. $\sqrt{121} = ...$ .....
3. $(-6)^2 = ...$ .....

3 Règles sous contrôle ★☆☆

Indique si chaque affirmation est vraie ou fausse, puis corrige celles qui sont fausses.

1. $3^2 + 3^4 = 3^6$. .....
2. $\sqrt{64} = 8$. .....
3. $5x + 2x = 7x$. .....

4 Développer avec méthode ★★☆

Développe et réduis chaque expression.

1. $D = 4(3x - 2) + 5x$ .....
2. $E = -3(2x + 7) - x$ .....
3. $F = 8x^2 - 3x + 5x^2 + 9x$ .....

5 Sortir le facteur commun ★★☆

Factorise chaque expression par le plus grand facteur commun possible.

1. $G = 15x + 20$ .....
2. $H = 12x^2 - 18x$ .....

6 Diviseurs communs ★★☆

Détermine le PGCD, puis simplifie chaque fraction.

1. Détermine PGCD(72 ; 120) et simplifie $72 \div 120$.

2. Détermine PGCD(45 ; 60) et simplifie $45 \div 60$.

7 Série finale : calcul complet ★★★

Calcule l'expression en respectant strictement les priorités.

1. $K = 3^2 - 2 \times (-4) + \sqrt{81} - (-5)$

2. $L = (-2)^3 + 5 \times (3 - 7)^2 \div 4$

8 Rédiger une réponse avec un PGCD ★★★

Justifie le nombre maximal de groupes identiques que tu peux former.

Tu disposes de 96 cartes rouges et de 144 cartes bleues. Tu veux former le plus grand nombre de groupes identiques en utilisant toutes les cartes. Détermine ce nombre et la composition d'un groupe.

ÉVALUATION

Réalise sans calculatrice lorsque cela est possible. Rédige les calculs et justifie la dernière question.

Barème : 20 points

1. Calcule $A = -8 + 3 \times (-5)$. / 3

2. Calcule $B = (-7)^2 - \sqrt{36}$. / 3

3. Simplifie $C = 5^3 \times 5^2 \div 5^4$. / 3

4. Développe et réduis $D = 4(2x - 3) - 5x$. / 3

5. Factorise $E = 14x + 21$. / 2

6. Détermine PGCD(54 ; 90), puis simplifie 54 ÷ 90. / 3

7. Justifie si l'affirmation « $\sqrt{(-16)} = -4$ » est vraie ou fausse. / 3

Les conseils de Coach Vince

Une ligne, une transformation
À chaque ligne, indique ce que tu viens de calculer : une puissance, un produit ou une réduction. Ton correcteur doit pouvoir suivre ton raisonnement sans deviner.

Contrôle final
Avant de valider, vérifie les signes, les parenthèses et l'ordre de grandeur du résultat. Une fraction simplifiée doit avoir un numérateur et un dénominateur sans diviseur commun supérieur à 1.

Pour aller plus loin sur exercices-3eme.fr

- **Toutes les fiches de Mathématiques en 3e** · /mathematiques-3eme/
- **Le domaine « nombres-calcul » en 3e** · /mathematiques-3eme/nombres-calcul/
- **Préparer le brevet (dates, épreuves, méthode)** · /brevet/