

Résoudre un système d'équations en 3^e : cours, exercices et méthode pour le brevet



3^e

Difficulté ★★★



45 min

Objectif : Résoudre un système d'équations

Tombe souvent au brevet

Version dys

Prénom :

Date :

Compétence visée (programme cycle 4) : Nombres relatifs, puissances, calcul littéral, racines carrées, arithmétique (PGCD, nombres premiers). les automatismes du brevet.



Coach Vince te résume l'essentiel

- ▶ Un système de deux équations à deux inconnues demande de trouver un même couple de valeurs qui vérifie les deux équations.
- ▶ La substitution remplace une inconnue par une expression équivalente ; l'élimination fait disparaître une inconnue en combinant les deux équations.

- Tu conclus toujours par une vérification dans les deux équations : c'est le contrôle final de ton raisonnement.

AU BREVET, ON TE DEMANDE...

Tu dois résoudre un système en présentant des transformations d'égalité justes, puis interpréter les valeurs trouvées dans une situation ou vérifier le couple obtenu.

Type de question Calcul à justifier, problème modélisé par un système, analyse d'une méthode de résolution ou question courte d'automatismes.

Exemple type Dans une papeterie, 2 cahiers et 3 stylos coûtent 11 €, tandis qu'un cahier et 2 stylos coûtent 7 €. Détermine le prix d'un cahier et celui d'un stylo.

Alerte piège Oublier de multiplier le second membre lorsqu'on prépare l'élimination, ou conclure sans contrôler le couple dans les deux équations initiales.

LA LEÇON

Comprendre ce que cherche un système

Un système de deux équations à deux inconnues est un ensemble de deux égalités qui contiennent les mêmes inconnues, souvent notées x et y . Par exemple : $x + y = 17$ et $2x + y = 25$. Résoudre ce système, c'est trouver les valeurs de x et de y qui rendent simultanément les deux égalités vraies. Ici, le couple $(8 ; 9)$ convient, car $8 + 9 = 17$ et $2 \times 8 + 9 = 25$. Attention : trouver une valeur qui vérifie une seule équation ne suffit pas. L'équation $x + y = 17$ possède une infinité de solutions possibles, comme $(1 ; 16)$, $(4 ; 13)$ ou $(8 ; 9)$. Le système impose une contrainte supplémentaire grâce à la deuxième équation ; il permet généralement de déterminer un seul couple. On présente souvent le système avec une accolade : $\{ x + y = 17 ; 2x + y = 25 \}$. Les lettres x et y sont des inconnues. Les nombres placés devant elles sont leurs coefficients. Dans $2x + y = 25$, le coefficient de x est 2 et celui de y est 1. Tu dois lire soigneusement les signes : $-y$ est différent de y , et $3x$ est différent de x . Un système peut modéliser une situation concrète : deux achats, deux tarifs, des longueurs ou des nombres dont on connaît la somme et une autre relation. Avant de calculer, repère toujours ce que représentent x et y . Cela t'aide à juger si le résultat final est cohérent.

Les deux méthodes à connaître

Méthode	Quand la choisir	Principe rigoureux
Substitution	Quand une équation permet d'isoler facilement x ou y , par exemple $y = 12 - x$ ou $x = 3y + 1$.	Tu remplaces une inconnue par une expression qui lui est égale dans l'autre équation. Tu obtiens alors une équation à une seule inconnue.
Élimination par combinaison	Quand les coefficients d'une inconnue sont opposés, ou peuvent le devenir facilement après multiplication d'une équation.	Tu additionnes ou tu soustrais deux égalités membre à membre afin de supprimer une inconnue. Les transformations doivent conserver les solutions du système.
Vérification	Après avoir trouvé les deux valeurs, quelle que soit la méthode utilisée.	Tu remplaces x et y dans chacune des deux équations de départ. Les deux égalités

		doivent être exactes.
--	--	-----------------------

La substitution : un plan de jeu en cinq étapes

- 1. Isole une inconnue dans l'équation la plus simple. Dans le système $\{ x + y = 17 ; 2x + y = 25 \}$, la première donne $y = 17 - x$. Soustraire x aux deux membres est autorisé, car tu effectues la même opération des deux côtés de l'égalité.
- 2. Remplace cette inconnue dans l'autre équation. Comme $y = 17 - x$, l'équation $2x + y = 25$ devient $2x + (17 - x) = 25$. Les parenthèses sont indispensables : elles montrent que toute l'expression $17 - x$ remplace y .
- 3. Résous l'équation obtenue : $2x + 17 - x = 25$, donc $x + 17 = 25$, puis $x = 8$. Réduis les termes semblables avec méthode : $2x - x = x$.
- 4. Calcule la seconde inconnue à l'aide de l'expression isolée. Ici, $y = 17 - 8$, donc $y = 9$. Tu peux aussi utiliser l'une des équations de départ, mais l'expression déjà obtenue est souvent plus rapide.
- 5. Vérifie dans le système de départ : $8 + 9 = 17$ et $2 \times 8 + 9 = 25$. Les deux lignes sont vraies ; la solution est donc $(8 ; 9)$. Rédige la conclusion clairement : « Le système a pour solution le couple $(8 ; 9)$. »
- La substitution reste valable si tu isolas x ou y dans l'une ou l'autre équation. Choisis simplement la voie qui évite les fractions et les calculs inutiles. Par exemple, si une ligne est $3x - y = 4$, tu peux écrire $y = 3x - 4$. Ne change jamais un

signe sans justifier l'opération : passer $-y$ de l'autre côté revient à ajouter y aux deux membres.

L'élimination : supprimer une inconnue sans perdre de solution

La méthode par élimination s'applique lorsque tu peux rendre les coefficients d'une inconnue opposés, puis additionner les deux équations membre à membre. Considère $\{ 3x + 2y = 16 ; 5x - 2y = 24 \}$. Les coefficients de y sont 2 et -2 : ils sont opposés. En additionnant, tu obtiens $3x + 2y + 5x - 2y = 16 + 24$, donc $8x = 40$ et $x = 5$. Remplace ensuite x par 5 dans une équation de départ : $3 \times 5 + 2y = 16$, donc $15 + 2y = 16$, puis $2y = 1$ et $y = \frac{1}{2}$. Vérifie : $3 \times 5 + 2 \times \frac{1}{2} = 16$ et $5 \times 5 - 2 \times \frac{1}{2} = 24$. Si les coefficients ne sont pas directement opposés, tu peux multiplier une équation entière par un même nombre non nul. Cette multiplication concerne tous les termes, y compris le second membre. Par exemple, pour éliminer y dans $\{ x + 2y = 7 ; 3x + y = 9 \}$, multiplie la deuxième équation par -2 avant d'additionner.

Bien rédiger une élimination avec multiplication

Prenons le système $\{ x + 2y = 7 ; 3x + y = 9 \}$. Les coefficients de y sont 2 et 1. Ils ne s'annulent pas si tu additionnes directement les deux équations. Tu choisis donc de multiplier la deuxième équation par -2 . Comme une égalité reste vraie lorsqu'on multiplie ses deux membres par un

même nombre non nul, $3x + y = 9$ devient $-6x - 2y = -18$. Tu écris alors le système équivalent $\{ x + 2y = 7 ; -6x - 2y = -18 \}$. Additionne les deux lignes : $x + 2y - 6x - 2y = 7 - 18$. Les termes en y s'annulent, d'où $-5x = -11$ et $x = 11 \div 5$. Cette valeur est correcte, même si elle n'est pas entière. Remplace-la dans $3x + y = 9$: $3 \times 11 \div 5 + y = 9$, donc $33 \div 5 + y = 45 \div 5$, puis $y = 12 \div 5$. La solution est $(11 \div 5 ; 12 \div 5)$. Ne cherche pas à obtenir à tout prix des entiers : un système peut avoir des solutions décimales ou fractionnaires. En revanche, un calcul avec une fraction exige de garder une écriture exacte tant que possible. Évite de passer trop tôt à une valeur approchée, car cela peut créer une erreur dans la vérification. Dans ta rédaction, indique l'équation que tu multiplies et le nombre utilisé. Le correcteur doit pouvoir suivre ton choix, pas seulement lire le résultat.

Les cas particuliers : aucune solution ou une infinité

Un système n'a pas toujours une unique solution. Si les deux équations représentent exactement la même relation, tous les couples qui vérifient l'une vérifient l'autre : il y a une infinité de solutions. Par exemple, $\{ x + y = 5 ; 2x + 2y = 10 \}$. La seconde équation est obtenue en multipliant toute la première par 2. En éliminant, tu arrives à $0 = 0$: cette égalité toujours vraie signale une infinité de solutions. À l'inverse, le système $\{ x + y = 5 ; 2x + 2y = 12 \}$ n'a aucune solution. Si tu multiplies la première équation

par -2 et que tu l'additionnes à la seconde, tu obtiens $0 = 2$, une égalité impossible. Dans une situation concrète, cela signifie que les informations données sont incompatibles. Ne divise jamais une égalité par une expression contenant une inconnue sans avoir vérifié qu'elle n'est pas nulle : tu pourrais supprimer des solutions. À ton niveau, privilégie la substitution ou l'élimination, puis interprète avec précision le résultat obtenu.

Exemples résolus

Résoudre par substitution

Énoncé. Résous le système $\{ x + y = 14 ; 3x - y = 6 \}$.

1. Isole y dans la première équation : $y = 14 - x$.
2. Remplace y dans la deuxième équation : $3x - (14 - x) = 6$.
3. Développe et résous : $3x - 14 + x = 6$, donc $4x = 20$, puis $x = 5$.
4. Calcule y : $y = 14 - 5 = 9$.
5. Vérifie : $5 + 9 = 14$ et $3 \times 5 - 9 = 6$.

Résultat : Le système a pour solution le couple $(5 ; 9)$.

Résoudre par élimination

Énoncé. Résous le système $\{ 2x + 3y = 19 ; 2x - 3y = 5 \}$.

1. Les coefficients de y sont opposés : 3 et -3 .
Ajoute les deux équations.

2. Tu obtiens $4x = 24$, donc $x = 6$.
3. Remplace x par 6 dans $2x - 3y = 5$: $12 - 3y = 5$.
4. Soustrais 12 aux deux membres : $-3y = -7$, donc $y = 7 \div 3$.
5. Vérifie dans la première équation : $2 \times 6 + 3 \times 7 \div 3 = 12 + 7 = 19$.

Résultat : Le système a pour solution le couple $(6 ; 7 \div 3)$.

Interpréter un système sans solution

Énoncé. Étudie le système $\{ 4x + 2y = 10 ; 2x + y = 8 \}$.

1. Multiplie la deuxième équation par -2 : $-4x - 2y = -16$.
2. Additionne cette équation à la première : $0 = -6$.
3. Cette égalité est impossible.

Résultat : Le système n'a aucune solution.

TA SÉANCE D'ENTRAÎNEMENT

1 Repère le bon couple ★★★

Indique si le couple proposé est solution du système.

1. Le couple $(3 ; 4)$ est-il solution de $\{ x + y = 7 ; 2x - y = 2 \}$?
2. Le couple $(2 ; 5)$ est-il solution de $\{ x + y = 7 ; 2x - y = 2 \}$?

2 Prépare la substitution ★★★

Isole l'inconnue demandée.

1. Dans $4x + y = 13$, exprime y en fonction de x .
.....
2. Dans $3x - 2y = 8$, exprime x en fonction de y .
.....

3 Résous sans détour ★★★

Résous chaque système par substitution.

1. $\{ x = y + 2 ; x + y = 10 \}$
2. $\{ y = 2x - 1 ; x + y = 8 \}$

4 Fais disparaître une inconnue ★★★

Résous chaque système par élimination.

1. $\{ x + 3y = 13 ; x - 3y = 1 \}$
2. $\{ 4x + y = 17 ; 2x - y = 1 \}$

5 Choisis la méthode efficace ★★★

Associe chaque système à la méthode la plus directe.

1. $\{ y = 5 - x ; 3x + 2y = 9 \}$

2. $\{ 5x + 2y = 18 ; 3x - 2y = 6 \}$

3. $\{ x + 4y = 12 ; 2x - 3y = 1 \}$

6 Traduis une situation ★★☆☆

Résous le problème en posant un système.

Deux sandwiches et un jus coûtent 11 €. Un sandwich et deux jus coûtent 10 €. Détermine le prix d'un sandwich et celui d'un jus.

7 Analyse le nombre de solutions ★★★

Détermine le nombre de solutions de chaque système et justifie.

$$\{ 2x - y = 4 ; 4x - 2y = 8 \}$$

$$\{ 2x - y = 4 ; 4x - 2y = 10 \}$$

8 Rédige une résolution complète ★★★

Résous le système par la méthode de ton choix et rédige toutes les étapes utiles.

$$\{ 3x + 2y = 18 ; x - 2y = 2 \}$$

I ÉVALUATION

Résous avec rigueur. Indique ta méthode lorsque cela est utile et vérifie tout couple solution.

Barème : 20 points

1. Le couple $(4 ; 3)$ est-il solution de $\{ x + y = 7 ; 2x + y = 11 \}$? Justifie.

2. Résous par substitution : $\{ y = 9 - x ; 2x + y = 13 \}$.

3. Résous par élimination : $\{ 3x + y = 16 ; 2x - y = 4 \}$.

4. Résous : $\{ x + 2y = 1 ; 3x - 2y = 15 \}$.

5. Détermine le nombre de solutions de $\{ x - y = 3 ; 2x - 2y = 6 \}$.

6. Un adulte et trois enfants paient 18 €. Deux adultes et un enfant paient 19 €. Détermine les deux tarifs.

Les conseils de Coach Vince



Annonce ta méthode

Avant les calculs, écris l'égalité que tu isolas ou l'équation que tu multiplies. Une démarche lisible vaut mieux qu'une suite de lignes sans lien.



Garde la vérification pour la finale

Vérifie le couple dans les deux équations de départ, jamais seulement dans l'équation transformée. Tu prouves ainsi que ton résultat répond bien au système complet.

Pour aller plus loin sur exercices-3eme.fr

- › **Toutes les fiches de Mathématiques en 3^e** . / [mathematiques-3eme/](https://exercices-3eme.fr/mathematiques-3eme/)
- › **Le domaine « nombres-calcul » en 3^e** . / [mathematiques-3eme/nombres-calcul/](https://exercices-3eme.fr/mathematiques-3eme/nombres-calcul/)
- › **Préparer le brevet (dates, épreuves, méthode)** . / [brevet/](https://exercices-3eme.fr/brevet/)