LE QG 3E · MATHÉMATIQUES · NOMBRES-CALCUL

Révisions de maths en 3e : les automatismes sans calculatrice, des signes aux puissances

3e | Difficulté ★★★ | 50 min | Objectif : Maîtriser les automatismes de calcul | Tombe souvent au brevet

Fiche élève

Prénom : .....

Date : .....

Compétence visée (programme cycle 4) : Nombres relatifs, puissances, calcul littéral, racines carrées, arithmétique (PGCD, nombres premiers). les automatismes du brevet.

Coach Vince te résume l'essentiel

- Tu installes des automatismes de calcul sans calculatrice : signes des nombres relatifs, priorités opératoires et soustraction remplacée par l'ajout de l'opposé.
- Les puissances et les racines carrées suivent des règles valables seulement dans certaines conditions, et l'écriture scientifique t'aide à lire les très grands et les très petits nombres.
- Coach Vince te demande un réflexe avant chaque calcul : entoure mentalement les parenthèses et les multiplications.

AU BREVET, ON TE DEMANDE...

Tu dois calculer exactement, simplifier une expression, utiliser une racine carrée ou justifier une répartition avec un PGCD. Tu peux aussi rencontrer des fractions, des puissances de 10 et des données issues d'une situation concrète.

Type de question Calcul à justifier, question d'automatismes sans calculatrice, développement ou factorisation, problème de partage utilisant le PGCD, calcul de fractions ou utilisation d'une écriture scientifique.

Exemple type Décompose 168 et 252 en facteurs premiers, puis détermine le nombre maximal de sachets identiques réalisables sans reste.

Alerte piège Appliquer une règle de puissances à une addition, oublier les parenthèses lors du remplacement d'un nombre négatif, additionner des fractions sans dénominateur commun, ou annoncer un PGCD sans montrer les décompositions.

LA LEÇON

Les nombres relatifs : conduire les signes sans hésiter

Sans calculatrice, un calcul juste repose sur des automatismes, et le premier d'entre eux concerne les signes des nombres relatifs. Un nombre relatif peut être positif, négatif ou nul. Son signe est placé devant son écriture : -7 est négatif, $+7$ est positif et 0 n'est ni positif ni négatif. Sur une droite graduée, le plus grand nombre est celui qui se situe le plus à droite. Ainsi, $-3 > -8$, car -3 est plus proche de 0. Pour additionner deux nombres de même signe, additionne leurs distances à 0 puis conserve le signe commun : $(-4) + (-9) = -13$. Pour deux nombres de signes contraires, calcule la différence entre les distances à 0 et garde le signe du nombre dont la distance à 0 est la plus grande : $(-12) + 5 = -7$. Soustraire un nombre revient à ajouter son opposé : $6 - (-4) = 6 + 4 = 10$. Cette

transformation est indispensable avant de calculer une suite d'additions et de soustractions. Dans un produit ou un quotient de nombres relatifs non nuls, le signe dépend du nombre de facteurs négatifs : un nombre pair de signes négatifs donne un résultat positif, un nombre impair donne un résultat négatif. Par exemple, $(-3) \times 5 \times (-2)$ contient deux facteurs négatifs : il est donc positif et vaut 30. Attention : cette règle concerne les produits et les quotients, pas les additions. Respecte aussi les priorités opératoires : parenthèses, puissances, multiplications et divisions de gauche à droite, puis additions et soustractions de gauche à droite. Dans $8 - 3 \times 4$, calcule d'abord 3×4 : le résultat est -4. Coach Vince te demande un réflexe : entoure mentalement les parenthèses et les multiplications avant de commencer.

Puissances et racines carrées : les règles à condition

Écriture	Sens ou règle	Exemple contrôlé
a^n	Si n est un entier positif, a^n est le produit de n facteurs égaux à a.	$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$
a^0	Si $a \neq 0$, alors $a^0 = 1$.	$(-5)^0 = 1$
$a^m \times a^n$	Si la base a est la même, alors $a^m \times a^n = a^{m+n}$.	$2^3 \times 2^4 = 2^7 = 128$
$a^m \div a^n$	Si la base a est la même et si $a \neq 0$, alors $a^m \div a^n = a^{m-n}$.	$7^5 \div 7^2 = 7^3 = 343$
$(a^m)^n$	Pour une puissance de puissance, multiplie les exposants.	$(3^2)^4 = 3^8$
$\sqrt{a}$	Si $a \geq 0$, $\sqrt{a}$ est l'unique nombre positif ou nul dont le carré vaut a.	$\sqrt{49} = 7$ car $7^2 = 49$
$a \times 10^n$	C'est une écriture scientifique si $1 \leq a < 10$ et si n est un entier relatif.	$4{,}5 \times 10^3 = 4\,500$

Ne mélange jamais les règles de puissances

Tu peux regrouper $5^3 \times 5^2$ en 5^5 parce que les bases sont identiques et qu'il s'agit d'une multiplication. En revanche, $5^3 + 5^2$ ne vaut pas 5^5 : calcule séparément, soit $125 + 25 = 150$. De même, $(2 + 3)^2 = 5^2 = 25$, alors que $2^2 + 3^2 = 13$. Le carré d'une somme ne se distribue pas terme à terme. Pour les racines, $\sqrt{64} = 8$ mais $\sqrt{(9 + 16)} = \sqrt{25} = 5$, qui n'est pas égal à $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 7$. Tu peux sortir un carré parfait d'une racine : $\sqrt{72} = \sqrt{(36 \times 2)} = 6\sqrt{2}$. Cette écriture est utile lorsque le nombre sous la racine contient un facteur carré parfait. Une racine carrée n'est définie, dans les nombres étudiés ici, que pour un nombre positif ou nul. Ainsi $\sqrt{0} = 0$, mais $\sqrt{(-9)}$ n'a pas de valeur réelle. Vérifie toujours ton résultat en le mettant au carré : si tu annonces que $\sqrt{81} = 9$, alors 9^2 doit bien être égal à 81.

Calcul littéral : un plan de jeu propre

- Réduis seulement les termes semblables. Des termes sont semblables lorsqu'ils ont exactement la même partie littérale. Dans $4x - 7 + 3x + 2$, tu peux regrouper $4x$ et $3x$, puis -7 et 2 : $7x - 5$. Tu ne peux pas réduire $4x + 3x^2$, car x et x^2 sont différents.
- Développe avec la distributivité. Pour tous nombres a, b et c, $a(b + c) = ab + ac$. Ainsi $5(2x - 3) = 10x - 15$. Si le facteur placé devant la parenthèse est négatif, distribue aussi ce signe : $-3(x - 4) = -3x + 12$.
- Supprime une parenthèse précédée de + ou de −. Devant +, les signes à l'intérieur ne changent pas. Devant −, chaque signe à l'intérieur change : $7 - (2x - 5) = 7 - 2x + 5 = 12 - 2x$.
- Factorise en recherchant un facteur commun. La distributivité permet le chemin inverse : $6x + 18 = 6(x + 3)$. Vérifie en développant ton résultat. Une factorisation correcte doit redonner l'expression de départ.
- Remplace une lettre avec des parenthèses. Pour calculer $A = 3x^2 - 2x + 1$ lorsque $x = -4$, écris $A = 3 \times (-4)^2 - 2 \times (-4) + 1$. La puissance porte sur -4 tout entier : $(-4)^2 = 16$. Tu obtiens $A = 48 + 8 + 1 = 57$.

Arithmétique : décomposer pour partager et simplifier

Un nombre premier est un entier positif qui possède exactement deux diviseurs positifs distincts : 1 et lui-même. Le nombre 2 est le seul nombre premier pair. Le nombre 1 n'est pas premier, car il ne possède qu'un seul diviseur positif. Pour savoir si un entier est premier, teste les divisions par les nombres premiers pertinents : il suffit d'aller jusqu'à la racine carrée du nombre. Par exemple, pour 97, $\sqrt{97}$ est inférieur à 10 ; teste donc 2, 3, 5 et 7. Aucune division n'est exacte, donc 97 est premier. La décomposition en facteurs premiers écrit un entier comme un produit de nombres premiers. Pour 180, tu peux écrire $180 = 2 \times 90 = 2^2 \times 45 = 2^2 \times 3^2 \times 5$. Range les facteurs pour lire facilement la décomposition. Le PGCD de deux entiers positifs est leur plus grand diviseur commun. Avec les décompositions, conserve seulement les facteurs premiers communs, chacun avec le plus petit exposant. Pour $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ et $84 = 2^2 \times 3 \times 7$, le PGCD est $2^2 \times 3 = 12$. Le PGCD sert notamment à former le plus grand nombre possible de groupes identiques, sans reste. Si 180 objets et 84 objets doivent être répartis en groupes identiques sans rien laisser, il peut y avoir au maximum 12 groupes. Chaque groupe contient alors 15 objets du premier type et 7 du second. Dans une fraction, diviser le numérateur et le dénominateur par un même nombre non nul ne change pas sa valeur. Le PGCD donne une simplification complète : $84 \div 180 = 7 \div 15$ après division des deux termes par 12. Écris les égalités de division : elles rendent ta démarche vérifiable. Pour additionner ou soustraire des fractions, commence par les écrire avec le même dénominateur : $3 \div 4 + 1 \div 6 = 9 \div 12 + 2 \div 12 = 11 \div 12$. Pour multiplier des fractions, multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux, en simplifiant si possible avant le produit. Une fraction représente souvent une part, une proportion ou une quantité dans un problème : indique donc ce qu'elle représente avant de conclure.

Écriture scientifique : lire les très grands et les très petits nombres

L'écriture scientifique d'un nombre est de la forme $a \times 10^n$, avec $1 \leq a < 10$ et n entier relatif. Elle permet d'écrire clairement des nombres très grands ou très petits. Par exemple, $3\,200\,000 = 3{,}2 \times 10^6$: la virgule a été déplacée de six rangs vers la gauche. À l'inverse, $0{,}000\,45 = 4{,}5 \times 10^{-4}$: la virgule a été déplacée de quatre rangs vers la droite pour obtenir 4,5. Avec les puissances de 10, utilise les règles sur les puissances seulement lorsqu'il y a une multiplication ou une division : $10^4 \times 10^3 = 10^7$ et $10^6 \div 10^2 = 10^4$. Dans un calcul contextualisé, garde les unités. Si une cellule mesure 6×10^{-6} m et que 2 000 cellules sont alignées, leur longueur totale est $2 \times 10^3 \times 6 \times 10^{-6}$ m $= 12 \times 10^{-3}$ m $= 1{,}2 \times 10^{-2}$ m, soit 0,012 m. Coach Vince insiste : une puissance de 10 donne l'ordre de grandeur, mais l'unité donne le sens de la réponse.

La méthode des automatismes sans calculatrice

Lis le calcul une première fois sans écrire : repère signes, parenthèses, puissances et fractions. Écris ensuite une ligne par transformation importante ; ne saute pas d'étape lorsqu'un signe change ou lorsqu'une règle de puissance est utilisée. Simplifie avant de multiplier dès que cela est possible : dans $18 \div 24$, divise le numérateur et le dénominateur par 6 pour obtenir $3 \div 4$. Pour additionner des fractions, cherche d'abord un dénominateur commun ; pour une écriture scientifique, vérifie que le premier facteur est compris entre 1 et 10. Pour un calcul littéral, annonce l'action attendue par le vocabulaire juste : « je développe », « je réduis », « je factorise » ou « je remplace x par … ». Pour une question d'arithmétique, donne la décomposition en facteurs premiers avant d'annoncer le PGCD. Termine par un contrôle adapté : ordre de grandeur pour un calcul numérique, développement pour une factorisation, carré pour une racine, ou divisibilité pour un PGCD. Dans un problème, réponds avec l'unité et une phrase de conclusion. Ta copie doit montrer une chaîne logique, pas seulement une réponse finale. Au brevet, un résultat exact et clairement présenté vaut mieux qu'une approximation inutile. Tu avances avec calme : une étape juste appelle la suivante.

Exemples résolus

Calculer une expression avec nombres relatifs

Énoncé. Calcule $A = -6 - 4 \times (-3) + 18 \div (-2)$.

1. Calcule d'abord la multiplication : $4 \times (-3) = -12$.
2. Calcule ensuite la division : $18 \div (-2) = -9$.

3. Remplace dans l'expression : $A = -6 - (-12) + (-9)$.
4. Transforme la soustraction d'un nombre négatif : $A = -6 + 12 - 9$.
5. Calcule de gauche à droite : $A = 6 - 9 = -3$.

Résultat : $A = -3$.

Développer, réduire puis calculer

Énoncé. On considère $B = 4(2x - 3) - 5x + 7$. Développe et réduis B, puis calcule sa valeur pour $x = -2$.

1. Développe : $4(2x - 3) = 8x - 12$.
2. Écris $B = 8x - 12 - 5x + 7$.
3. Réduis les termes semblables : $B = 3x - 5$.
4. Remplace x par -2 avec des parenthèses : $B = 3 \times (-2) - 5$.
5. Calcule : $B = -6 - 5 = -11$.

Résultat : $B = 3x - 5$, puis $B = -11$ pour $x = -2$.

Utiliser une décomposition en facteurs premiers

Énoncé. Deux lots contiennent 126 et 210 jetons. Détermine le nombre maximal de paquets identiques réalisables sans reste.

1. Décompose 126 : $126 = 2 \times 63 = 2 \times 3^2 \times 7$.
2. Décompose 210 : $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$.
3. Garde les facteurs communs avec le plus petit exposant : $2 \times 3 \times 7$.
4. Calcule le PGCD : $2 \times 3 \times 7 = 42$.
5. Vérifie la répartition : $126 \div 42 = 3$ et $210 \div 42 = 5$.

Résultat : On peut former au maximum 42 paquets identiques, contenant chacun 3 jetons du premier lot et 5 du second.

Calculer une fraction dans une situation

Énoncé. Pour une sortie, un groupe parcourt $3 \div 4$ km le matin puis $5 \div 6$ km l'après-midi. Quelle distance parcourt-il au total ?

1. Les deux distances sont exprimées dans la même unité : le kilomètre.
2. Cherche un dénominateur commun à 4 et 6 : 12.
3. Écris $3 \div 4 = 9 \div 12$ et $5 \div 6 = 10 \div 12$.
4. Additionne les fractions : $9 \div 12 + 10 \div 12 = 19 \div 12$.
5. Convertis si nécessaire : $19 \div 12 = 1 + 7 \div 12$.

Résultat : Le groupe parcourt $19 \div 12$ km, soit $1 + 7 \div 12$ km.

Utiliser les puissances de 10 dans un problème

Énoncé. Une sonde parcourt $7{,}5 \times 10^6$ m en une heure. Quelle distance parcourt-elle en 3 heures ? Donne le résultat en écriture scientifique.

1. Multiplie la distance d'une heure par 3 : $3 \times 7{,}5 \times 10^6$ m.
2. Calcule le coefficient : $3 \times 7{,}5 = 22{,}5$.

3. Écris d'abord : $22{,}5 \times 10^6$ m.
4. Mets sous forme scientifique : $22{,}5 \times 10^6 = 2{,}25 \times 10^7$.

Résultat : La sonde parcourt $2{,}25 \times 10^7$ m en 3 heures.

TA SÉANCE D'ENTRAÎNEMENT

1 Signes et priorités ★★★

Calcule en respectant les priorités opératoires.

1. $A = -7 + 12 - 9$ .....
2. $B = (-6) \times 4 \div (-3)$ .....
3. $C = 5 - 3 \times (-4)$ .....

2 Puissances et racines ★★★

Complète chaque égalité.

1. $2^5 = \ldots$ .....
2. $(-4)^2 = \ldots$ .....
3. $\sqrt{121} = \ldots$ .....
4. $3^2 \times 3^4 = 3\ldots$ .....

3 Règles sous contrôle ★★★

Indique si chaque affirmation est vraie ou fausse.

1. $-5^2 = 25$. .....
2. $\sqrt{0} = 0$. .....
3. $4^3 + 4^2 = 4^5$. .....

4 Réduire sans mélanger ★★★

Réduis chaque expression littérale.

1. $D = 7x - 3 + 5x + 8$ .....
2. $E = 4a^2 - 9a + 3a^2 + 2a$ .....
3. $F = 6 - (2x - 5) + 3x$ .....

5 Deux sens de la distributivité ★★★

Développe ou factorise selon l'écriture donnée.

1. $G = -4(3x - 2)$ .....
2. $H = 5x + 20$ .....
3. $I = 7(2y + 1) - 3y$ .....

6 Facteurs premiers et PGCD ★★★

Décompose puis détermine le PGCD.

Décompose 144 et 216 en facteurs premiers, puis calcule leur PGCD.

Deux rubans de 144 cm et 216 cm doivent être découpés en morceaux de même longueur, la plus grande possible, sans reste. Détermine la longueur d'un morceau.

7 Finale : calculs justifiés ★★★

Rédige les calculs en indiquant les transformations utiles.

Calcule $J = 3^2 - 2 \times (-5) + \sqrt{49}$.

On considère $K = 2(x - 4) - 3(x + 1)$. Développe et réduis K, puis calcule K pour $x = -1$.

ÉVALUATION

Réponds sans calculatrice et rédige les étapes essentielles.

Barème : 20 points

1. Calcule $A = -8 + 3 \times (-5)$. / 3

2. Calcule $B = (-3)^2 - 4^2$. / 3

3. Réduis $C = 6x - 4 + 9 - 2x$. / 3

4. Développe $D = -5(2x - 3)$. / 3

5. Factorise $E = 8x + 12$. / 3

6. Décompose 90 et 150 en facteurs premiers, puis calcule leur PGCD. / 5

Les conseils de Coach Vince

Annonce la règle
Avant une transformation importante, écris la règle utilisée : distributivité, priorité opératoire ou décomposition en facteurs premiers. Ta démarche devient lisible et tu repères plus vite une erreur.

Contrôle ciblé
Ne relis pas passivement ton résultat : vérifie-le avec l'opération inverse ou un test adapté. Un développement contrôle une factorisation ; un carré contrôle une racine.

Pour aller plus loin sur exercices-3eme.fr

- **Toutes les fiches de Mathématiques en 3e** · /mathematiques-3eme/
- **Le domaine « nombres-calcul » en 3e** · /mathematiques-3eme/nombres-calcul/
- **Préparer le brevet (dates, épreuves, méthode)** · /brevet/