



Les systèmes d'équations en 3^e : cours, exercices et méthode pour le brevet

3^e

Difficulté ★★



45 min

Objectif : les systèmes d'équations

Tombe souvent au brevet

Vidéoprojection

Compétence visée (programme cycle 4) : Résoudre un système de deux équations à deux inconnues par substitution ou par combinaison, et modéliser un problème par un système.



Coach Vince te résume l'essentiel

- ▶ Un système de deux équations cherche un même couple de valeurs pour les deux inconnues.
- ▶ Par substitution, isole une inconnue puis remplace-la dans l'autre équation.

- Par combinaison, additionne ou soustrais des équations en conservant une équation initiale ou transformée équivalente afin d'éliminer une inconnue.

AU BREVET, ON TE DEMANDE...

Tu dois résoudre un système en détaillant une méthode correcte, vérifier le couple obtenu et souvent interpréter ce couple dans une situation concrète. Les systèmes peuvent apparaître dans différents types de problèmes : aucun poids fixe n'est attribué à cette notion au DNB.

Type de question Calcul à justifier, puis problème de modélisation avec une phrase-réponse.
Exemple type Dans une vente, x objets coûtent 6 euros chacun et y objets coûtent 9 euros

Alerte piège chacun. Sachant que $x + y = 17$ et que la recette vaut 123 euros, détermine x et y .
Oublier de distribuer le signe moins devant une parenthèse, ou annoncer une seule valeur au lieu du couple solution.

I LA LEÇON

I Comprendre ce que tu cherches

Un système de deux équations à deux inconnues est un ensemble de deux égalités contenant les mêmes inconnues, souvent notées x et y . Résoudre le système consiste à trouver tous les couples $(x ; y)$ qui rendent simultanément les deux égalités vraies. Le mot simultanément est décisif : une valeur qui vérifie une seule équation n'est pas une solution du système. Par exemple, dans le système « $x + y = 7$ » et « $2x - y = 2$ », le couple $(3 ; 4)$ convient : $3 + 4 = 7$ et $2 \times 3 - 4 = 2$. Il est donc solution. En revanche, le couple $(2 ; 5)$ vérifie bien la première égalité, car $2 + 5 = 7$, mais il ne vérifie pas la seconde, car $2 \times 2 - 5 = -1$. Il doit être refusé. Graphiquement, chaque équation du premier degré à deux inconnues correspond à une droite. Une solution commune correspond alors à un point commun aux deux droites. Si les droites se coupent, le système possède une solution unique. Si elles sont parallèles et distinctes, il n'existe aucune solution. Si elles sont confondues, tous les couples d'une même droite sont solutions : il y en a une infinité. Les méthodes algébriques permettent de conclure sans tracer. Elles demandent une rédaction rigoureuse : tu annonces la méthode, tu conserves les signes et tu vérifies le couple final dans les deux équations.

Choisir une méthode adaptée

Situation observée	Méthode efficace	Premier geste
Une inconnue est déjà seule, par exemple $y = 5 - 2x$.	Substitution.	Remplace y par $5 - 2x$ dans l'autre équation.
Une inconnue s'isole facilement, par exemple $x + y = 9$.	Substitution.	Écris $x = 9 - y$ ou $y = 9 - x$, puis choisis l'écriture la plus simple.
Les coefficients d'une inconnue sont opposés, par exemple $3x + 2y = 8$ et $5x - 2y = 4$.	Combinaison linéaire.	Additionne les deux équations membre à membre pour éliminer y .
Les coefficients peuvent devenir opposés après une multiplication simple.	Combinaison linéaire.	Multiplie une ou deux équations, puis additionne ou soustrais les égalités obtenues.
Les deux équations semblent proportionnelles.	Examine le cas particulier.	Compare les coefficients de x , de y et les nombres seuls avant de diviser.

La substitution, étape après étape

- Utilise la substitution lorsqu'une inconnue est isolée ou peut l'être sans calcul lourd. Dans le système « $x + y = 11$ » et « $3x - y = 1$ », isole par exemple y dans la première équation : $y = 11 - x$.
- Remplace exactement y par l'expression trouvée dans l'autre équation. Les parenthèses sont indispensables si l'expression est précédée d'un signe moins ou multipliée : $3x - (11 - x) = 1$. Elles protègent les signes.
- Résous l'équation à une inconnue : $3x - 11 + x = 1$, donc $4x - 11 = 1$, puis $4x = 12$ et $x = 3$. À ce moment, tu connais une seule coordonnée du couple.
- Reprends l'expression isolée pour calculer l'autre inconnue : $y = 11 - 3$, donc $y = 8$. Tu peux aussi remplacer x par 3 dans l'une des équations de départ, mais l'expression isolée est souvent plus rapide.
- Écris la solution sous la forme $S = \{(3 ; 8)\}$. Vérifie : $3 + 8 = 11$ et $3 \times 3 - 8 = 1$. Les deux égalités sont vraies ; le couple est validé.
- Si tu obtiens une égalité toujours vraie, comme $0 = 0$, après substitution, les deux équations représentent la même condition : le système a une infinité de solutions. Si tu obtiens une égalité impossible, comme $0 = 5$, les conditions sont incompatibles : le système n'a pas de solution.

Combinaison linéaire : une opération autorisée sous condition

Tu peux multiplier les deux membres d'une même équation par un même nombre non nul : cette transformation conserve les solutions du système. Tu peux aussi additionner ou soustraire les membres de deux équations pour fabriquer une nouvelle équation utile, mais tu dois conserver l'une des équations initiales ou une équation qui lui est équivalente. Remplacer les deux équations par leur seule somme ne donne pas, en général, un système équivalent. Dans le système « $2x + 3y = 13$ » et « $4x - 3y = 5$ », les coefficients de y sont opposés. Additionne les équations : $2x + 3y + 4x - 3y = 13 + 5$, donc $6x = 18$ et $x = 3$. Garde ensuite une équation de départ et remplace x par 3 : $2 \times 3 + 3y = 13$, donc $3y = 7$ et $y = 7 \div 3$. La solution est $S = \{(3 ; 7 \div 3)\}$. Si les coefficients ne sont pas directement opposés, fabrique-les. Par exemple, pour éliminer y lorsque les coefficients sont 2 et 3, multiplie la première équation par 3 et la seconde par -2 : tu obtiens $6y$ et $-6y$.

Mettre un problème en système

Dans un problème, commence par définir clairement les inconnues avec leur unité. Si un parking contient des voitures et des motos, tu peux écrire : « x est le nombre de voitures et y est le nombre de motos. » Traduis ensuite chaque information par une équation. Le nombre total de véhicules donne

une somme, par exemple $x + y = 18$. Si chaque voiture a quatre roues et chaque moto en a deux, un total de roues donne $4x + 2y = 54$. Tu obtiens un système. La solution doit avoir un sens dans le contexte : ici, x et y doivent être des nombres entiers positifs. Résolvons par substitution : $y = 18 - x$. Alors $4x + 2(18 - x) = 54$, donc $4x + 36 - 2x = 54$, puis $2x = 18$ et $x = 9$. Ainsi $y = 9$. La phrase-réponse est : « Le parking contient 9 voitures et 9 motos. » Relis toujours l'énoncé après le calcul. Une solution négative peut être algébriquement correcte mais impossible pour un nombre d'objets ; elle signale souvent une mauvaise traduction ou des données incompatibles. Ne confonds pas non plus un total d'objets avec un total de prix ou de longueurs : chaque équation doit représenter une information précise. Pour un prix, garde la même unité partout. Pour des âges, vérifie que les résultats sont cohérents. Ton plan de jeu est fixe : définir, traduire, résoudre, vérifier, conclure avec les mots de la situation.

Exemples résolus

Résoudre par substitution

Énoncé. Résous le système : $x + y = 14$ et $2x - y = 1$.

1. Isole y dans la première équation : $y = 14 - x$.
2. Remplace y dans la seconde équation : $2x - (14 - x) = 1$.

3. Développe et résous : $2x - 14 + x = 1$, donc $3x = 15$ et $x = 5$.

4. Calcule y : $y = 14 - 5$, donc $y = 9$.

5. Vérifie : $5 + 9 = 14$ et $2 \times 5 - 9 = 1$.

Résultat : $S = \{(5 ; 9)\}$.

Résoudre par combinaison linéaire

Énoncé. Résous le système : $3x + 2y = 16$ et $5x - 2y = 8$.

1. Les coefficients de y sont opposés : additionne les deux équations.

2. Tu obtiens $3x + 2y + 5x - 2y = 16 + 8$, donc $8x = 24$.

3. Résous : $x = 3$.

4. Remplace x par 3 dans la première équation : $3 \times 3 + 2y = 16$, donc $2y = 7$ et $y = 7 \div 2$.

5. Vérifie dans la seconde équation : $5 \times 3 - 2 \times 7 \div 2 = 8$.

Résultat : $S = \{(3 ; 7 \div 2)\}$.

Modéliser une situation

Énoncé. Au cinéma, x adultes et y jeunes assistent à une séance. Il y a 20 personnes. Une place adulte coûte 8 euros et une place jeune coûte 5 euros. La recette est de 124 euros. Détermine x et y .

1. Pose x comme le nombre d'adultes et y comme le nombre de jeunes.
2. Traduis le nombre de personnes : $x + y = 20$.
3. Traduis la recette : $8x + 5y = 124$.
4. Isole y : $y = 20 - x$.
5. Remplace dans l'équation de recette : $8x + 5(20 - x) = 124$, donc $3x + 100 = 124$.
6. Résous : $3x = 24$, donc $x = 8$. Puis $y = 20 - 8 = 12$.
7. Vérifie : $8 + 12 = 20$ et $8 \times 8 + 5 \times 12 = 124$.

Résultat : Il y a 8 adultes et 12 jeunes.

Les conseils de Coach Vince



Annonce ta méthode

Écris « Par substitution » ou « Par combinaison linéaire » avant tes calculs. Le correcteur suit ton raisonnement et repère immédiatement l'objectif de chaque ligne.



Termine proprement

Encadre ou écris clairement le couple solution, puis vérifie-le dans les deux équations. Une réponse de problème se conclut par une phrase avec l'unité ou les objets concernés.

TA SÉANCE D'ENTRAÎNEMENT

1 Tester un couple ★★

Détermine si le couple proposé est solution du système.

1. Le couple $(2 ; 3)$ est-il solution de $x + y = 5$ et $2x - y = 1$?
2. Le couple $(4 ; 1)$ est-il solution de $x + y = 6$ et $3x + y = 13$?

2 Substitution directe ★★

Résous chaque système par substitution.

1. $y = 9 - x$ et $2x + y = 12$.

2. $x = 2y + 1$ et $x + y = 10$.

3 Éliminer une inconnue ★★

Résous chaque système par combinaison linéaire.

1. $4x + y = 13$ et $2x - y = 5$.

2. $3x + 5y = 19$ et $2x - 5y = 1$.