



# Le théorème de Pythagore en 3<sup>e</sup> : cours, exercices et méthode pour le brevet

3<sup>e</sup>

Difficulté ★★



45 min

Objectif : calculer une longueur inconnue

Tombe souvent au brevet

Vidéoprojection

**Compétence visée (programme cycle 4) :** Mener des raisonnements géométriques : utiliser le théorème de Pythagore pour calculer une longueur dans un triangle rectangle, et sa réciproque pour démontrer qu'un triangle est rectangle (ou ne l'est pas).



## Coach Vince te résume l'essentiel

- Le théorème de Pythagore relie les trois côtés d'un triangle rectangle : si ABC est rectangle en A, alors  $BC^2 = AB^2 + AC^2$ , avec l'hypoténuse [BC] en face de l'angle droit.

- ▶ Sa réciproque fait l'inverse : elle te permet de prouver qu'un triangle est rectangle à partir de ses trois longueurs, sans équerre ni rapporteur.
- ▶ Au brevet, chaque calcul se rédige en quatre temps : théorème cité, égalité posée, calcul mené, conclusion écrite — zéro étape sautée, zéro point perdu.

## AU BREVET, ON TE DEMANDE...

Le théorème de Pythagore et sa réciproque tombent quasi systématiquement dans l'exercice de géométrie : calcul d'une longueur, ou démonstration qu'un triangle est rectangle, avec une rédaction complète attendue et notée.

**Type de question** Calcul à justifier rédigé (partie principale, avec figure fournie) ou question

**Exemple type** d'automatismes courte sans calculatrice sur l'identification de l'hypoténuse.  
Partie 1 : ABC est un triangle rectangle en A avec  $AB = 4,5$  cm et  $AC = 6$  cm. Calcule la longueur BC. Partie 2 : Un triangle DEF a pour longueurs  $DE = 7$  cm,  $EF = 24$  cm et  $DF = 25$  cm. Démontre que le triangle DEF est rectangle.

### Alerte piège

Confondre le côté de l'angle droit et l'hypoténuse dans l'égalité, ou oublier de vérifier la cohérence du résultat final : une hypoténuse doit toujours rester la plus grande longueur du triangle.

## I LA LEÇON

### I Le théorème de Pythagore : l'énoncé exact

Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux côtés de l'angle droit. Les côtés de l'angle droit sont les deux côtés qui forment l'angle droit lui-même : ce sont ceux que l'on utilise habituellement comme base et hauteur pour calculer l'aire du triangle. L'hypoténuse, elle, est toujours le côté le plus long du triangle : c'est le côté opposé à l'angle droit, celui qui ne le touche jamais. Si un triangle ABC est rectangle en A, l'angle droit se trouve au sommet A, donc l'hypoténuse est le côté [BC], puisqu'il ne contient pas la lettre A. L'égalité de Pythagore s'écrit alors  $BC^2 = AB^2 + AC^2$ . Cette relation ne s'applique QUE dans un triangle rectangle : sans angle droit vérifié ou donné par l'énoncé, tu n'as pas le droit de l'utiliser pour calculer une longueur. Pour manipuler cette égalité sans erreur, tu dois maîtriser deux outils du calcul numérique :

le carré d'un nombre, qui se calcule en multipliant ce nombre par lui-même, et la racine carrée, qui fait l'opération inverse et permet de revenir à une longueur à partir d'un carré. Par exemple, le carré de 7 est 49, et la racine carrée de 49 est 7. Le théorème de Pythagore ne donne accès qu'à des longueurs : il ne calcule ni une aire ni un angle directement, même si la longueur trouvée peut ensuite servir à ces calculs. Cas particulier à connaître : dans un triangle rectangle isocèle en A, les deux côtés de l'angle droit AB et AC ont la même longueur, et l'égalité se simplifie en  $BC^2 = 2 \times AB^2$ .

## **Repérer l'hypoténuse sans te tromper**

- Repère le sommet de l'angle droit : il est signalé par un petit carré sur la figure, ou donné directement dans l'énoncé par la formule « rectangle en... ».
- L'hypoténuse est le côté opposé à ce sommet : elle relie les deux autres sommets du triangle, ceux qui ne portent pas l'angle droit.
- Une hypoténuse ne contient jamais la lettre du sommet de l'angle droit : dans un triangle rectangle en A, l'hypoténuse est [BC], jamais [AB] ni [AC].
- Les deux côtés de l'angle droit, eux, contiennent tous les deux la lettre du sommet de l'angle droit : ici, ce sont [AB] et [AC].

- L'hypoténuse est toujours le côté le plus long du triangle rectangle : un résultat trouvé plus petit qu'un des deux autres côtés est forcément faux, il faut reprendre le calcul.

### **Calculer une longueur : la méthode en quatre temps**

Pour calculer l'hypoténuse, respecte toujours le même enchaînement. D'abord, identifie le triangle rectangle et son sommet : la donnée « rectangle en A » indique où se trouve l'angle droit. Vérifie aussi que les trois longueurs sont exprimées dans la même unité avant tout calcul : convertis-les si nécessaire, sinon l'égalité de Pythagore n'a aucun sens. Ensuite, écris l'égalité de Pythagore en plaçant seule l'hypoténuse au carré dans un membre, par exemple  $BC^2 = AB^2 + AC^2$ . Puis remplace les longueurs connues et calcule la somme des deux carrés. Enfin, prends la racine carrée du résultat pour obtenir BC, en précisant l'unité. Quand l'inconnue est un côté de l'angle droit, l'organisation s'inverse : tu connais l'hypoténuse et un côté de l'angle droit, et tu cherches le second. Écris l'égalité complète, puis isole le carré inconnu en le passant seul dans un membre, par exemple  $AC^2 = BC^2 - AB^2$ . Calcule cette fois la différence des carrés, jamais le carré de la différence, puis prends la racine carrée du résultat pour obtenir AC. Une erreur fréquente consiste à additionner ou soustraire les longueurs avant de les élever au carré : ce n'est ni  $(AB + AC)^2$  ni  $(BC - AB)^2$ , mais bien  $AB^2 + AC^2$  d'un côté et  $BC^2 - AB^2$  de l'autre, des calculs totalement différents. Dans les deux cas, l'unité de longueur suit celle des données de l'énoncé et doit apparaître dans la conclusion. Si la racine carrée ne donne pas un nombre entier, garde

la valeur exacte sous forme de racine, comme  $\sqrt{52}$  cm, sauf si l'énoncé demande explicitement une valeur arrondie, en précisant alors la précision choisie.

## **I La réciproque : démontrer qu'un triangle est rectangle**

La réciproque du théorème de Pythagore sert à un usage inverse : démontrer qu'un triangle est rectangle sans équerre, à partir de ses trois longueurs déjà connues. Avant tout calcul, commence par comparer les trois longueurs données pour repérer laquelle est la plus grande : c'est elle qui joue le rôle de l'hypoténuse dans l'égalité à tester, et c'est seulement une fois cette comparaison faite que le calcul a un sens. Si, dans un triangle, le carré du côté le plus long est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle, et l'angle droit se trouve au sommet opposé à ce côté le plus long. Pour l'appliquer, calcule séparément le carré du plus grand côté, puis la somme des carrés des deux autres côtés, et compare les deux résultats obtenus. S'ils sont égaux, le triangle est rectangle : conclus en précisant le sommet de l'angle droit. S'ils sont différents, le triangle n'est PAS rectangle, c'est une conclusion tout aussi valable et tout aussi attendue au brevet : elle ne signifie pas que le calcul est raté, mais que la question posée trouve une réponse négative. Une rédaction complète nomme toujours les trois côtés utilisés, mène les deux calculs séparément, compare explicitement les résultats, puis conclut sur la nature du triangle. Cette structure — données, théorème

ou réciproque cité, calcul détaillé, conclusion rédigée – est celle que le correcteur du brevet recherche ligne par ligne.

## | Théorème ou réciproque : ne pas inverser l'outil

Le théorème calcule une longueur dans un triangle déjà connu comme rectangle. La réciproque démontre qu'un triangle est rectangle à partir de ses trois longueurs. Utiliser le théorème pour prouver qu'un triangle est rectangle, ou la réciproque pour calculer une longueur, est un contresens qui coûte des points au brevet. Repère toujours, avant de calculer, ce que te donne l'énoncé : un triangle déjà rectangle, ou seulement trois longueurs à tester.

## | Quel outil pour quelle situation ?

| Ce que tu sais                                       | Outil à utiliser       | Ce que tu obtiens                 |
|------------------------------------------------------|------------------------|-----------------------------------|
| Triangle rectangle connu, une longueur manque        | Théorème de Pythagore  | Une longueur calculée             |
| Trois longueurs connues, nature du triangle inconnue | Réciproque du théorème | Une conclusion : rectangle ou non |

|                                                        |                                     |                                                   |
|--------------------------------------------------------|-------------------------------------|---------------------------------------------------|
| Triangle rectangle connu, hypoténuse et un côté connus | Théorème, égalité réorganisée       | Le second côté de l'angle droit                   |
| Nombres 3-4-5, 5-12-13 ou leurs multiples              | Triplets pythagoriciens à connaître | Un contrôle rapide du résultat, sans calculatrice |

## Exemples résolus

### Calculer une hypoténuse

**Énoncé.** ABC est un triangle rectangle en A tel que  $AB = 6$  cm et  $AC = 8$  cm. Calcule la longueur BC.

1. ABC est rectangle en A, donc l'hypoténuse est [BC], le côté opposé à l'angle droit.
2. D'après le théorème de Pythagore :  $BC^2 = AB^2 + AC^2$ .
3.  $BC^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$ .
4.  $BC = \sqrt{100} = 10$ .

**Résultat :**  $BC = 10$  cm.

### Calculer un côté de l'angle droit

**Énoncé.** EFG est un triangle rectangle en E tel que  $FG = 13$  cm et  $EF = 5$  cm. Calcule la longueur EG.

1. EFG est rectangle en E, donc l'hypoténuse est  $[FG]$ , le côté opposé à l'angle droit.
2. D'après le théorème de Pythagore :  $FG^2 = EF^2 + EG^2$ .
3.  $EG^2 = FG^2 - EF^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$ .
4.  $EG = \sqrt{144} = 12$ .

**Résultat :** EG = 12 cm.

### Démontrer qu'un triangle est rectangle avec la réciproque

**Énoncé.** Un triangle RST a pour longueurs  $RS = 9$  cm,  $ST = 12$  cm et  $RT = 15$  cm. Le triangle RST est-il rectangle ?

1. Le côté le plus long est  $[RT]$  : c'est lui qui doit vérifier l'égalité s'il existe un angle droit.
2. Je calcule  $RT^2 = 15^2 = 225$ .
3. Je calcule  $RS^2 + ST^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$ .

4.  $RT^2 = RS^2 + ST^2$ , donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle RST est rectangle en S, le sommet opposé au côté [RT].

**Résultat :** RST est rectangle en S.

## Les conseils de Coach Vince



### Cite le théorème avant de calculer

N'écris jamais une égalité de Pythagore sans l'annoncer par une phrase : « Dans le triangle ABC rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore... ». Cette phrase vaut des points au brevet, même si ton calcul final est juste.



### Vérifie la cohérence de ton résultat

Une hypoténuse trouvée plus petite qu'un des deux autres côtés est automatiquement fausse : reprends ton calcul. Ce réflexe de vérification te fait gagner plus de points qu'un calcul refait dans la précipitation.

# I TA SÉANCE D'ENTRAÎNEMENT

## 1 Repère l'hypoténuse ★★

*Nomme l'hypoténuse de chaque triangle rectangle (le côté opposé à l'angle droit).*

1. ABC est rectangle en A. Quelle est son hypoténuse ?
2. DEF est rectangle en E. Quelle est son hypoténuse ?
3. MNP est rectangle en P. Quelle est son hypoténuse ?

## 2 Calcule l'hypoténuse ★★

*Calcule la longueur de l'hypoténuse en détaillant le théorème de Pythagore.*

1. ABC est rectangle en A, avec  $AB = 16$  cm et  $AC = 30$  cm. Calcule BC.
2. DEF est rectangle en D, avec  $DE = 15$  cm et  $DF = 20$  cm. Calcule EF.
3. GHI est rectangle en G, avec  $GH = 10$  cm et  $GI = 24$  cm. Calcule HI.

## 3 Calcule un côté de l'angle droit ★★

*L'hypoténuse est connue : calcule le côté manquant de l'angle droit.*

- 1.** RST est rectangle en R. L'hypoténuse  $ST = 25$  cm et  $RS = 24$  cm. Calcule RT.
- 2.** JKL est rectangle en J. L'hypoténuse  $KL = 15$  cm et  $JK = 12$  cm. Calcule JL.
- 3.** UVW est rectangle en U. L'hypoténuse  $VW = 37$  cm et  $UV = 35$  cm. Calcule UW.